

## Zur Theorie der diskreten unsymmetrischen Irrfahrt

Von E. HENZE\*)

*Für die unsymmetrische Irrfahrt im ebenen Gitter der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten werden das Klassifikationsproblem, die Übergangswahrscheinlichkeit mit ihrer erzeugenden Funktion, das Visitenproblem und die wichtigsten Absorptionswahrscheinlichkeiten behandelt. Als Gebiete werden dabei die unbegrenzte Ebene und die obere Halbebene mit der Abszissenachse als punktweise 1-absorbierender Berandung zugrunde gelegt und die asymptotischen Ausdrücke für verschwindende Maschenweite des Gitters aufgestellt.*

*For the unsymmetrical random walk in the plane square grid formed by the points with integer coordinates the classification of the points, the probability of reaching a given point in  $n$  steps with its generating function, the expected number of visits at a point and the most important absorption probabilities are investigated. Two regions are considered: the whole plane and the upper half plane with the real axis as pointwise 1-absorbing barrier. Asymptotical expressions for vanishing mesh length of the grid are given.*

Для несимметрического скитания в плоской решетке, состоящей из точек с целочисленными координатами, рассматриваются вопрос классификации, вероятности переходов и порождающая её функция, вопрос навешивания и наиболее важные вероятности поглощения. В качестве областей при этом кладутся в основу неограниченная плоскость и верхняя полуплоскость с осью абсцисс в качестве точно — поглощающей границы. Затем устанавливаются асимптотические выражения для стягивающегося к нулю размера отверстий решетки.

### I. Einleitung

In einer kürzlich als Vortragsauszug in der ZAMM erschienenen Arbeit [11] hat der Verfasser Gelegenheit gehabt, über die Voraussetzungen und Ergebnisse seiner Dissertation [10] zu berichten. Die vorliegende Abhandlung soll nur eine Ergänzung des Aufsatzes [11] sein. Anhand des dort genannten Teilgebietes der unsymmetrischen Irrfahrt in der Voll- und Halbebene sollen Methoden und Ergebnisse noch näher erläutert werden, als das in dem kurzen Überblick [11] möglich war. Der Kürze halber verweisen wir für die Voraussetzungen, soweit sie in [11] nicht genannt sind, und in bezug auf die Bezeichnungen auf die Arbeit [10] oder das Buch von W. FELLER [1]. Die wichtigste Literatur sei am Ende dieses Aufsatzes genannt.

### II. Das Klassifikationsproblem

Wir wollen nun die unsymmetrische Irrfahrt im ebenen Gitter der Punkte mit ganzzahligen kartesischen Koordinaten betrachten; eine Partikel, ein Teilchen führt auf diesem Gitter eine Irrfahrt aus, wobei die vier Wahrscheinlichkeiten für die Richtung der Wanderung für alle Punkte  $(x, y)$  durch die Relationen

$$\left. \begin{aligned} P\{(x, y) \rightarrow (x+1, y)\} &= p_1, \\ P\{(x, y) \rightarrow (x-1, y)\} &= q_1, \\ P\{(x, y) \rightarrow (x, y+1)\} &= p_2, \\ P\{(x, y) \rightarrow (x, y-1)\} &= q_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

mit der Bedingung

$$p_1 + q_1 + p_2 + q_2 = 1 \dots \dots \dots (2)$$

gegeben sind. Die so definierte — im allgemeinen unsymmetrische — Irrfahrt soll in der vollen Ebene und in der oberen Halbebene mit der aus 1-absorbierenden Punkten  $(k, 0)$ ;  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  zusammengesetzt gedachten Abszissenachse als Rand untersucht werden.

#### II.1. Klassifikation der Irrfahrt in der unbegrenzten Ebene

Es ist nun, wie im Abschnitt III.3. gezeigt wird

$$P_{00}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha d\beta}{1 - 2s(\sqrt{p_1 q_1} \cos \alpha + \sqrt{p_2 q_2} \cos \beta)} \dots \dots \dots (1.1)$$

\*) Mitteilung aus dem Mathematischen Institut A der Technischen Hochschule Stuttgart. Für die Anregung und stete Förderung der Arbeit danke ich Herrn Professor Dr. G. SCHULZ.



die erzeugende Funktion für die Wahrscheinlichkeit  $p^{(n)}(\xi, \eta; \xi, \eta)$ , daß die im Punkte  $(\xi, \eta)$  startende Irrfahrt nach  $n$  Schritten — nicht notwendig zum ersten Male — den Ausgangspunkt wieder erreicht. Nach dem von FOSTER und GOOD [19] aufgestellten Kriterium braucht man zur Entscheidung über das Vorliegen rekurrenter oder transienter Stellen nur die Divergenz oder Konvergenz von

$$\lim_{s \rightarrow 1-0} P_{00}(s) \dots \dots \dots (1.2)$$

zu zeigen. Man erkennt, daß nur der Fall  $\alpha = \beta = 0$  von Interesse ist; man kann leicht zeigen, daß für die symmetrische Irrfahrt dieser Grenzwert (1.2) nicht existiert. Es gibt aber noch eine ganze Anzahl solcher Fälle. Man setzt

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \cos^2 \lambda \cos^2 \varphi, & p_1 &= \sin^2 \lambda \cos^2 \varphi, & 0 \leq \varphi, \psi \leq \pi \\ q_2 &= \cos^2 \lambda \sin^2 \varphi, & q_2 &= \sin^2 \lambda \sin^2 \varphi; & 0 \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1.3)$$

und erhält als Divergenzbedingung

$$\sin 2\lambda \cos(\varphi - \psi) = 1 \dots \dots \dots (1.4)$$

Diese Gleichung hat die einzige Lösung

$$\lambda = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi = \psi \dots \dots \dots (1.5)$$

und damit gilt

$$\begin{aligned} p_1 &= q_1 = \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \\ p_2 &= q_2 = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \end{aligned} \dots \dots \dots (1.6)$$

als Bedingung für das Auftreten rekurrenter Stellen. DOMB [6] hat gezeigt, daß unter der Bedingung (1.6) alle Stellen der Irrfahrt rekurrent sind. Wir können jetzt diese Aussage noch verschärfen:

Für die unbegrenzte Irrfahrt im Gitter mit den gegebenen Elementarwahrscheinlichkeiten (1) sind für

$$p_1 = q_1, \quad p_2 = q_2$$

alle Stellen rekurrent, in allen anderen Fällen sind sie transient.

## II.2. Klassifikation der Irrfahrt in der Halbebene

Durch Heranziehung des asymptotischen Ausdrucks (III.5.1) für die Rückkehrwahrscheinlichkeit  $P^{(n)}(\xi, \eta; \xi, \eta)$  in der Halbebene

$$P^{(n)}(\xi, \eta; \xi, \eta) \sim \frac{A}{n} e^{-Bn} \left\{ 1 - e^{-\frac{C}{n} \eta} \right\} \dots \dots \dots (2.1)$$

mit Konstanten  $A$ ,  $B$  und  $C$  kann man zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$$

für alle  $(\xi, \eta)$  außer für  $\eta = 0$  konvergiert. Damit gilt:

Bei der Irrfahrt im Gitter der oberen Halbebene, wobei alle Punkte der Abszissenachse als 1-absorbierend angesetzt sind, bilden alle Punkte der offenen Halbebene eine transiente Kette, die Punkte des Randes nach Voraussetzung je eine rekurrente Kette mit nur einem Element.

## III. Das Übergangs-, Visiten- und Absorptionsproblem für die unsymmetrische Irrfahrt

Mit diesem Abschnitt kommen wir zur Aufstellung geschlossener Ausdrücke für die vielfältigen Problemstellungen bei der Irrfahrt in der unbegrenzten Ebene und in der Halbebene.

### III.1. Übergangswahrscheinlichkeit für die Irrfahrt in der unbegrenzten Ebene

Zur Herstellung der Übergangswahrscheinlichkeit  $p^{(n)}(x, y; \xi, \eta)$  nehmen wir der Einfachheit halber zunächst den Ursprung als Startpunkt der Irrfahrt an und haben für  $p^{(n)}(x, y)$  bekanntlich die Bedingungen:

$$\begin{aligned} &1. \text{ Die Wahrscheinlichkeit } p^{(n)}(x, y) \text{ ist Lösung der partiellen Differenzengleichung} \\ p^{(n+1)}(x, y) - \{p_1 p^{(n)}(x-1, y) + q_1 p^{(n)}(x+1, y) + p_2 p^{(n)}(x, y-1) + q_2 p^{(n)}(x, y+1)\} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$



2. Die Wahrscheinlichkeit  $p^{(n)}(x, y)$  erfüllt die Anfangsbedingungen

$$p^{(0)}(0, 0) = 1, \quad p^{(1)}(1, 0) = p_1, \quad p^{(1)}(-1, 0) = q_1, \quad \dots \quad (1.2).$$

$$p^{(1)}(0, 1) = p_2, \quad p^{(1)}(0, -1) = q_2$$

Man konstruiert nun  $p^{(n)}(x, y)$  aus der Differenzengleichung (1.1) mit den Anfangswerten (1.2) — durch beide ist sie offensichtlich eindeutig bestimmt — in Analogie zu der von STÖHR [21] entwickelten Methode für die GREENSCHE Funktion von partiellen Differenzengleichungen über die charakteristische Funktion von (1.1) und den Ansatz als bestimmtes Integral zur Erfüllung der Anfangsbedingungen. Man erhält nach einiger Rechnung ( $p_i, q_i \neq 0$ )

$$p^{(n)}(x, y) = \frac{2^n}{(2\pi)^2} \left(\frac{p_1}{q_1}\right)^{\frac{x}{2}} \left(\frac{p_2}{q_2}\right)^{\frac{y}{2}} \times \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sqrt{p_1 q_1} \cos \alpha + \sqrt{p_2 q_2} \cos \beta)^n \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta \quad (1.3).$$

Will man nun die Irrfahrt allgemein vom Punkte  $(\xi, \eta)$  aus starten lassen, so gewinnt man durch eine Koordinatenverschiebung die Aussage:

Es ist:

$$p^{(n)}(x, y; \xi, \eta) = \frac{2^n}{(2\pi)^2} \left(\frac{p_1}{q_1}\right)^{\frac{x-\xi}{2}} \left(\frac{p_2}{q_2}\right)^{\frac{y-\eta}{2}} \times \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sqrt{p_1 q_1} \cos \alpha + \sqrt{p_2 q_2} \cos \beta)^n \cos \alpha (x-\xi) \cos \beta (y-\eta) \, d\alpha \, d\beta \quad (1.4)$$

die Wahrscheinlichkeit, daß eine vom Punkt  $(\xi, \eta)$  ausgehende unsymmetrische Irrfahrt in der unbegrenzten Ebene nach genau  $n$  Schritten — nicht notwendig zum ersten Male — im Punkt  $(x, y)$  angekommen ist. Sie gehorcht der Differenzengleichung (1.1) mit den Anfangswerten (1.2) und ist damit die einzige Lösung des Übergangsproblems.

### III.2. Übergangswahrscheinlichkeit bei verschwindender Maschenweite des Gitters

Wir wollen hier das asymptotische Verhalten der Übergangswahrscheinlichkeit (1.4) für verschwindende Maschenweite des Gitters und verschwindenden Zeitmaßstab studieren. Die Differenzengleichung (1.1) lautet, wenn

$$\Delta x = \Delta y = \varepsilon, \quad \Delta n = \delta \quad \dots \quad (2.1)$$

die Schrittweiten der Irrfahrt bzw. das Raster des Zeitmaßstabes sind, für verschwindende  $\varepsilon$  und  $\delta$ , wobei wegen der notwendigen Betrachtung standardisierter Variabler noch mit konstantem  $a$

$$\varepsilon^2 = 4 a^2 \delta \quad \dots \quad (2.2)$$

gelten soll,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + (p_1 - q_1) \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (p_2 - q_2) \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - 2 a^2 (p_1 + q_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 a^2 (p_2 + q_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.3).$$

Man kann erkennen, daß  $p_1 - q_1$  und  $p_2 - q_2$  beide von der Ordnung  $O(\varepsilon)$  sein müssen, wenn der Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  ein endliches Resultat liefern soll. Man kann daher ansetzen

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{4} + \frac{v_x}{4 a^2} \varepsilon, & q_1 &= \frac{1}{4} - \frac{v_x}{4 a^2} \varepsilon, \\ p_2 &= \frac{1}{4} + \frac{v_y}{4 a^2} \varepsilon, & q_2 &= \frac{1}{4} - \frac{v_y}{4 a^2} \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2.4),$$

wobei mit  $v_x$  und  $v_y$  die Komponenten der Drift bezeichnet seien und  $(4 a^2)^{-1}$  ein Normierungsfaktor ist. Aus der Gleichung (2.3) folgt dann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = a^2 \Delta \varphi - 2 v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2 v_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \dots \quad (2.5).$$

Dieses ist die bekannte FOKKER-PLANCK-Gleichung für die Diffusion mit dem Driftvektor  $(v_x, v_y)$  und dem Diffusionskoeffizienten  $a^2$ .

Löst man nun die Differenzengleichung zunächst wie in Abschnitt III.1. für endliche  $\varepsilon$  und  $\delta$  und geht dann in der Lösung ebenfalls zur Grenze über, so erhält man schließlich das Ergebnis:

Es ist

$$p^{(n)}(x, y; \xi, \eta) \sim \frac{1}{4 \pi n a^2} e^{-\frac{1}{4 n a^2} \{ (x-\xi-2 n v_x)^2 + (y-\eta-2 n v_y)^2 \}} \quad \dots \quad (2.6)$$

die für verschwindende Maschenweite des Gitters gültige asymptotische Formel für die Übergangswahrscheinlichkeit. Sie gehorcht der Differentialgleichung (2.5) für das Übergangsproblem.



## III.3. Aufstellung der erzeugenden Funktion für die Rückkehrwahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Irrfahrt in  $n$  Schritten zum Ausgangspunkt  $(\xi, \eta)$  zurückkehrt ist einfach mit der Gleichung (1.4) für  $x = \xi$ ,  $y = \eta$  gegeben, ihre erzeugende Funktion lautet dann

$$P_{00}(s) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2s)^n \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sqrt{p_1 q_1} \cos \alpha + \sqrt{p_2 q_2} \cos \beta)^n d\alpha d\beta \quad \dots \quad (3.1)$$

und nach Aufsummieren der Reihe, die ja für  $|s| < 1$  konvergiert und nach Ausrechnung des Integrals über  $\beta$  mit der Substitution  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = z$

$$P_{00}(s) = \frac{1}{\pi \sqrt{(1 + 2s\sqrt{p_1 q_1})^2 - 4s^2 p_2 q_2}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^4 + 2z^2 \frac{1 - 4s^2(p_1 q_1 + p_2 q_2)}{(1 + 2s\sqrt{p_1 q_1})^2 - 4s^2 p_2 q_2} + \frac{(1 - 2s\sqrt{p_1 q_1})^2 - 4s^2 p_2 q_2}{(1 + 2s\sqrt{p_1 q_1})^2 - 4s^2 p_2 q_2}}} \quad (3.2).$$

Man erkennt, daß das Integral ein vollständiges elliptisches Integral erster Gattung ist; nach einigen Umformungen erhält man als Resultat:

Die erzeugende Funktion der Rückkehrwahrscheinlichkeit  $p^{(n)}(\xi, \eta; \xi, \eta)$  für die unsymmetrische Irrfahrt in der unbegrenzten Ebene ist bis auf den Faktor

$$\frac{2}{\pi \sqrt{1 - 4s^2 (\sqrt{p_1 q_1} - \sqrt{p_2 q_2})^2}} \quad \dots \quad (3.3)_1$$

das vollständige elliptische Integral erster Gattung  $K(k)$  mit dem Modul

$$k = \frac{4s\sqrt{p_1 q_1 p_2 q_2}}{\sqrt{1 - 4s^2 (\sqrt{p_1 q_1} - \sqrt{p_2 q_2})^2}} \quad \dots \quad (3.3)_2.$$

Man erkennt, daß beim Übergang zur symmetrischen Irrfahrt das Resultat von PÓLYA aus der Arbeit [19] folgt.

## III.4. Übergangswahrscheinlichkeit für die Irrfahrt in der Halbebene

In diesem und den folgenden Abschnitten soll die unsymmetrische Irrfahrt in der oberen Halbebene untersucht werden. Die  $x$ -Achse als Berandung sei dabei aus lauter 1-absorbierenden Punkten zusammengesetzt, d. h. eine Irrfahrt, die etwa nach dem  $n$ -ten Schritt irgendeinen Gitterpunkt auf dieser Achse erreicht, endet mit diesem Schritt in diesem betreffenden Punkt. Der Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit muß hier neu konstruiert werden. Dieses geschieht mit Hilfe des folgenden Spiegelungsprinzips.

Die Irrfahrt starte von einem Punkt  $(\xi, \eta)$  in der oberen Halbebene, wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit, in  $n$  Schritten — nicht notwendig zum ersten Male — einen Punkt  $(x, y)$  in der oberen Halbebene zu erreichen, ohne vorher die absorbierende Linie  $y = 0$  passiert oder berührt zu haben. Wie z. B. bei v. MISES [2] für die Übergangswahrscheinlichkeit der eindimensionalen symmetrischen Irrfahrt gezeigt wird, betrachtet werden allerdings nur asymptotische Ausdrücke für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten, kann man die gesuchte Übergangswahrscheinlichkeit  $P^{(n)}(x, y; \xi, \eta)$  für die obere Halbebene folgendermaßen herstellen:

$P^{(n)}(x, y; \xi, \eta)$  besteht zunächst aus der Übergangswahrscheinlichkeit  $p^{(n)}(x, y; \xi, \eta)$  für die unbegrenzte Ebene, damit sind alle Wege der Irrfahrt berücksichtigt, die in  $n$  Schritten von  $(\xi, \eta)$  nach  $(x, y)$  führen. Davon zu subtrahieren ist nun aber die Wahrscheinlichkeit, die zu den Wegen gehört, die irgendwo die Abszissenachse berührt oder gar passiert haben. Spiegelt man nun alle diese verbotenen Wege bis zum letzten Berührungspunkt mit der Achse an dieser, so sieht man, daß die vom Spiegelpunkt  $(\xi, -\eta)$  zu  $(\xi, \eta)$  ausgehenden Wege gerade die verbotenen sind. Da alle Wege von  $(\xi, -\eta)$  nach  $(x, y)$  bei der Rückspiegelung in die obere Halbebene verbotene Wege werden, sind alle diese erfaßt worden. Die erlaubten Wege von  $(\xi, \eta)$  nach  $(x, y)$  sind also alle Wege, vermindert um die Anzahl der Wege, die vom Spiegelpunkt  $(\xi, -\eta)$  in  $n$  Schritten nach  $(x, y)$  führen. Die gesuchte Übergangswahrscheinlichkeit ist daher gegeben durch

$$P^{(n)}(x, y; \xi, \eta) = p^{(n)}(x, y; \xi, \eta) - \bar{p}^{(n)}(x, y; \xi, -\eta) \quad \dots \quad (4.1).$$



Wir haben den zweiten Summanden mit einer Tilde versehen, weil sich offensichtlich bei der geschilderten Spiegelung die Bedeutung von  $p_2$  und  $q_2$ , also die  $y$ -Richtung der Drift umkehrt, so daß die Gleichung (4.1) ausführlich lautet

$$P^{(n)}(x, y; \xi, \eta) = \frac{2^{n+1}}{(2\pi)^2} \left( \frac{p_1}{q_1} \right)^{\frac{x-\xi}{2}} \left( \frac{p_2}{q_2} \right)^{\frac{y-\eta}{2}} \times \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sqrt{p_1 q_1} \cos \alpha + \sqrt{p_2 q_2} \cos \beta)^n \cos \alpha (x - \xi) \sin \beta y \sin \beta \eta d\alpha d\beta \quad (4.2).$$

Man hat also die Aussage:

Es ergibt sich die Gleichung (4.2) als gesuchte Übergangswahrscheinlichkeit für die Irrfahrt in der oberen Halbebene. Sie gehorcht der Differenzengleichung (1.1), erfüllt die Anfangsbedingungen (1.2) und befriedigt außerdem die Randbedingung

$$P^{(n)}(x, y; \xi, 0) = 0 \quad (4.3)$$

für alle  $x, y$  und  $\xi$ . Sie ist damit die einzige Lösung des Übergangsproblems in der Halbebene.

### III.5. Übergangswahrscheinlichkeit in der Halbebene bei verschwindender Maschenweite des Gitters

Nennt man die Schrittweite im Gitter wieder  $\varepsilon$  und das Raster des Zeitmaßstabes wieder

$\delta = \frac{\varepsilon^2}{4a^2}$ , so folgt für kleine  $\varepsilon$  eine der Gleichung (2.7) entsprechende Formel

$$P^{(n)}(x, y; \xi, \eta) \sim \frac{1}{4\pi n a^2} e^{-\frac{1}{4na^2} \{(x-\xi-2nv_x)^2 + (2nv_y)^2 - 4nv_y(y-\eta)\}} \times \left\{ e^{-\frac{1}{4na^2}(y-\eta)^2} - e^{-\frac{1}{4na^2}(y+\eta)^2} \right\} \quad (5.1).$$

### III.6. Erzeugende Funktion für die Rückkehrwahrscheinlichkeit in der Halbebene

Die erzeugende Funktion für die Rückkehrwahrscheinlichkeit lautet

$$P_{00}^{(H)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(\xi, \eta; \xi, \eta) s^n \quad (6.1),$$

wobei  $P^{(n)}(\xi, \eta; \xi, \eta)$  mit der Gleichung (4.2) gegeben ist. Nach Aufsummieren der Reihe und Ausrechnen des Integrals über  $\beta$  folgt, wenn man eine neue Variable  $\gamma$  einführt, die durch

$$2s(\sqrt{p_1 q_1} \cos \alpha + \sqrt{p_2 q_2} \cosh \gamma) = 1 \quad (6.2)$$

definiert sein soll (wir fordern  $0 < s < 1$ ), für die gesuchte erzeugende Funktion die Aussage:

Die erzeugende Funktion für die Rückkehrwahrscheinlichkeit bei der unsymmetrischen Irrfahrt in der oberen Halbebene lautet

$$P_{00}^{(H)}(s) = P_{00}(s) - \frac{1}{4\pi s \sqrt{p_2 q_2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-2\gamma\eta}}{\sinh \gamma} d\alpha \quad (6.3),$$

wobei  $P_{00}(s)$  die erzeugende Funktion für die Rückkehrwahrscheinlichkeit in der unbegrenzten Ebene nach Abschnitt III.3. und  $\gamma$  die durch (6.2) definierte Funktion von  $\alpha$  und  $s$  ist.

### III.7. Lösung des Visitenproblems für die Irrfahrt in der Halbebene

Die Irrfahrt gehe von einer transienten Stelle  $(\xi, \eta)$  aus, der betrachtete Punkt  $(x, y)$  sei ebenfalls transient. Man kann nun nach der Anzahl der Besuche  $N(x, y; \xi, \eta)$  in  $(x, y)$  fragen. Die Lösung des Visitenproblems ist dann der Erwartungswert

$$\mathcal{E}\{N(x, y; \xi, \eta)\} = V(x, y; \xi, \eta) \quad (7.1),$$

das ist die mittlere Anzahl von Besuchen in  $(x, y)$  bei einer von  $(\xi, \eta)$  ausgehenden Irrfahrt.

Die Lösung des Visitenproblems kann nun einmal als Lösung der partiellen Differenzengleichung

$$\varphi(x, y; \xi, \eta) - \{p_1 \varphi(x-1, y; \xi, \eta) + q_1 \varphi(x+1, y; \xi, \eta) + p_2 \varphi(x, y-1; \xi, \eta) + q_2 \varphi(x, y+1; \xi, \eta)\} = \delta_{x\xi} \delta_{y\eta} \quad (7.2)$$

mit der Randbedingung

$$V_H(x, y; \xi, 0) = 0 \quad (7.3)$$



für alle  $x, y$  und  $\xi$  gefunden werden. Man kann sie andererseits auch aus der Reihenentwicklung

$$V_H(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(x, y; \xi, \eta) \quad \dots \quad (7.4)$$

mit der Übergangswahrscheinlichkeit (4.2) gewinnen. Summiert man die so gewonnene Reihe auf, so erhält man nach Ausrechnen des Integrals über  $\beta$

$$V_H(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{p_1}{q_1} \right)^{\frac{x-\xi}{2}} \left( \frac{p_2}{q_2} \right)^{\frac{y-\eta}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha (x - \xi) \times \left\{ \frac{[(1 - 2\sqrt{p_1 q_1} \cos \alpha) - \sqrt{(1 - 2\sqrt{p_1 q_1} \cos \alpha)^2 - 4 p_2 q_2}]^{|y-\eta|}}{(2\sqrt{p_2 q_2})^{|y-\eta|} \sqrt{(1 - 2\sqrt{p_1 q_1} \cos \alpha)^2 - 4 p_2 q_2}} - \frac{[(1 - 2\sqrt{p_1 q_1} \cos \alpha) - \sqrt{(1 - 2\sqrt{p_1 q_1} \cos \alpha)^2 - 4 p_2 q_2}]^{y+\eta}}{(2\sqrt{p_2 q_2})^{y+\eta} \sqrt{(1 - 2\sqrt{p_1 q_1} \cos \alpha)^2 - 4 p_2 q_2}} \right\} d\alpha \quad (7.5)$$

und mit einer analog zu (6.2) angesetzten Variablen

$$2(\sqrt{p_1 q_1} \cos \alpha + \sqrt{q_2 p_2} \cosh \gamma) = 1 \quad \dots \quad (7.6)$$

und mit der Fallunterscheidung  $y \geq \eta$  schließlich das Ergebnis:

Die Lösung des Visitenproblems für die unsymmetrische Irrfahrt in der oberen Halbebene lautet

$$V_H(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi \sqrt{p_2 q_2}} \left( \frac{p_1}{q_1} \right)^{\frac{x-\xi}{2}} \left( \frac{p_2}{q_2} \right)^{\frac{y-\eta}{2}} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha (x - \xi) \frac{e^{-\gamma \eta} \sinh \gamma y}{\sinh \gamma} d\alpha \quad (7.7)_1$$

für  $y \leq \eta$  und

$$V_H(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi \sqrt{p_2 q_2}} \left( \frac{p_1}{q_1} \right)^{\frac{x-\xi}{2}} \left( \frac{p_2}{q_2} \right)^{\frac{y-\eta}{2}} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha (x - \xi) \frac{e^{-\gamma y} \sinh \gamma \eta}{\sinh \gamma} d\alpha \quad (7.7)_2$$

für  $y \geq \eta$ . Sie genügt der Differenzengleichung (7.2) und der Randbedingung (7.3).

### III.8. Lösung des Visitenproblems bei verschwindender Maschenweite des Gitters

Unter den Voraussetzungen des Abschnitts III.2. geht die Differenzengleichung für das Visitenproblem in die Gleichung für die GREENSche Funktion des Differentialausdrucks (2.5) über

$$a^2 \Delta \varphi - 2 v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2 v_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -4 \pi a^2 \delta(P - Q) \quad \dots \quad (8.1).$$

Mit der Definition von  $\gamma$

$$2\sqrt{p_1 q_1} \cos \alpha \varepsilon + 2\sqrt{p_2 q_2} \cosh \gamma \varepsilon = 1 \quad \dots \quad (8.2)$$

gilt bei verschwindender Maschenweite des Gitters

$$V_H(x, y; \xi, \eta) \sim \frac{2}{\pi} e^{\frac{v_x}{a^2}(x-\xi) + \frac{v_y}{a^2}(y-\eta)} \cdot \int_0^{\infty} \cos \alpha (x - \xi) \{ -e^{-\alpha(y+\eta)} - e^{-\alpha|y-\eta|} \} \frac{d\alpha}{\alpha} \quad (8.3).$$

Das Integral ist geschlossen auswertbar und liefert abschließend:

Die Lösung des Visitenproblems für die unsymmetrische Irrfahrt in der Halbebene lautet asymptotisch für verschwindende Maschenweite des Gitters

$$V_H(x, y; \xi, \eta) \sim \frac{2}{\pi} e^{\frac{v_x}{a^2}(x-\xi) + \frac{v_y}{a^2}(y-\eta)} \cdot \{ \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} - \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \} \quad (8.4).$$

Sie gehorcht der Gleichung (8.1) mit der Randbedingung  $V_H(x, y; \xi, 0) = 0$ .

### III.9. Wahrscheinlichkeit, daß die Irrfahrt in $n$ Schritten in einem bestimmten Punkt der Achse absorbiert wird

Von diesem Abschnitt an soll das Absorptionsproblem behandelt werden, d. h. hier soll zunächst die Wahrscheinlichkeit  $a^{(n)}(k, 0; \xi, \eta)$  ausgerechnet werden, daß eine von  $(\xi, \eta)$  ausgehende Irrfahrt nach genau  $n$  Schritten im speziellen Punkt  $(k, 0)$  der Achse absorbiert wird. Da wir die Punkte der Achse als 1-absorbierend vorausgesetzt haben, ist offenbar eine Absorption in



$(k, 0)$ ;  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  nur bei einer Annäherung von oben, von  $(k, 1)$  aus, möglich; mit der Übergangswahrscheinlichkeit  $P^{(n)}(x, y; \xi, \eta)$  nach (4.2) gilt also

$$a^{(n)}(k, 0; \xi, \eta) = q_2 P^{(n-1)}(k, 1; \xi, \eta) \quad \dots \quad (9.1)$$

und damit die Aussage:

Es ist

$$a^{(n)}(k, 0; \xi, \eta) = \frac{2^n \sqrt{p_2 q_2}}{(2\pi)^2} \left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{\frac{\xi-k}{2}} \left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{\frac{\eta}{2}} \times \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sqrt{p_1 q_1} \cos \alpha + \sqrt{p_2 q_2} \cos \beta)^{n-1} \cos \alpha (\xi - k) \sin \beta \sin \eta \, d\alpha \, d\beta. \quad \dots \quad (9.2)$$

die Wahrscheinlichkeit, daß die im Punkte  $(\xi, \eta)$  startende Irrfahrt in der oberen Halbebene nach genau  $n$  Schritten im Punkt  $(k, 0)$  der absorbierenden Achse absorbiert wird.

Man kann durch Einsetzen leicht verifizieren, daß die so konstruierte Absorptionswahrscheinlichkeit der partiellen Differenzgleichung

$$a^{(n+1)}(k, 0; \xi, \eta) - \{p_1 a^{(n)}(k, 0; \xi + 1, \eta) + q_1 a^{(n)}(k, 0; \xi - 1, \eta) + p_2 a^{(n)}(k, 0; \xi, \eta + 1) + q_2 a^{(n)}(k, 0; \xi, \eta - 1)\} = 0 \quad \dots \quad (9.3)$$

und der Anfangsbedingung

$$a^{(1)}(k, 0; \xi, \eta) = q_2 \delta_{\xi k} \delta_{\eta 1} \quad \dots \quad (9.4)$$

gehört, die man zusammen auch als Definition für diese Wahrscheinlichkeit nehmen kann. Sie ist damit die einzige Lösung des Problems.

### III.10. Wahrscheinlichkeit, daß die Irrfahrt irgendwann in einem bestimmten Punkt der Achse absorbiert wird

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $a(k, 0; \xi, \eta)$ , daß die Irrfahrt bei beliebig großem Zeitparameter  $n$  im speziellen Punkt  $(k, 0)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  der Achse absorbiert wird, kann einmal, wegen der Eigenschaft der Lösung des Visitenproblems, GREENSche Funktion der Differenzgleichung für  $a(k, 0; \xi, \eta)$

$$a(k, 0; \xi, \eta) - \{p_1 a(k, 0; \xi + 1, \eta) + q_1 a(k, 0; \xi - 1, \eta) + p_2 a(k, 0; \xi, \eta + 1) + q_2 a(k, 0; \xi, \eta - 1)\} = 0 \quad \dots \quad (10.1)$$

zu sein, geschrieben werden als

$$a(k, 0; \xi, \eta) = q_2 V_H(k, 1; \xi, \eta) \quad \dots \quad (10.2)_1$$

Zum anderen ist sie aus der Reihenentwicklung

$$a(k, 0; \xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{(n)}(k, 0; \xi, \eta) \quad \dots \quad (10.2)_2$$

mit der Absorptionswahrscheinlichkeit (9.2) zu gewinnen. Es ergibt sich als Resultat:

Es ist

$$a(k, 0; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{\frac{\xi-k}{2}} \left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{\frac{\eta-2}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha (\xi - k) e^{-\gamma \eta} \, d\alpha \quad \dots \quad (10.3)$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit, daß die Irrfahrt in der oberen Halbebene irgendwann in einem bestimmten Punkt  $(k, 0)$  der Achse absorbiert wird. Dabei ist  $\gamma$  durch (7.6) bestimmt.

### III.11. Wahrscheinlichkeit, daß die Irrfahrt in $n$ Schritten in irgendeinem Punkt der Achse absorbiert wird

Da wir uns die Achse aus lauter 1-absorbierenden Punkten zusammengesetzt denken, finden wir die Wahrscheinlichkeit  $A^{(n)}(\xi, \eta)$ , daß eine von  $(\xi, \eta)$  ausgehende Irrfahrt nach genau  $n$  Schritten irgendwo auf der Achse absorbiert wird, aus der Beziehung

$$A^{(n)}(\xi, \eta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{(n)}(k, 0; \xi, \eta) \quad \dots \quad (11.1).$$



Schreibt man diese Relation ausführlich hin und bezeichnet das Integral über  $\alpha$  als

$$g(\beta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{p_1}{q_1} \right)^{\frac{k}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} (\sqrt{p_1 q_1} \cos \alpha + \sqrt{p_2 q_2} \cos \beta)^{n-1} \cos \alpha (\xi - k) d\alpha \quad (11.2),$$

so gewinnt man nach einiger Rechnung zunächst die Gleichung

$$g(\beta) = 2\pi \left( \frac{p_1}{q_1} \right)^{\frac{\xi}{2}} \left[ \frac{p_1 + q_1}{2} + \sqrt{p_2 q_2} \cos \beta \right]^{n-1} \quad (11.3).$$

Hiermit gilt schließlich:

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $A^{(n)}(\xi, \eta)$ , daß eine vom Punkt  $(\xi, \eta)$  ausgehende Irrfahrt in der oberen Halbebene nach genau  $n$  Schritten irgendwo auf der Abszissenachse absorbiert wird, lautet

$$A^{(n)}(\xi, \eta) = \frac{2^{n-1} \sqrt{p_2 q_2}}{\pi} \left( \frac{q_2}{p_2} \right)^{\frac{\eta}{2}} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{p_1 + q_1}{2} + \sqrt{p_2 q_2} \cos \beta \right]^{n-1} \sin \beta \sin \beta \eta d\beta \quad (11.4).$$

Die gefundene Wahrscheinlichkeit gehorcht der partiellen Differenzengleichung

$$A^{(n+1)}(\xi, \eta) - \{p_1 A^{(n)}(\xi + 1, \eta) + q_1 A^{(n)}(\xi - 1, \eta) + p_2 A^{(n)}(\xi, \eta + 1) + q_2 A^{(n)}(\xi, \eta - 1)\} = 0 \quad (11.5)$$

mit der Anfangsbedingung

$$A^{(1)}(\xi, \eta) = q_2 \delta_{\eta 1} \quad (11.6)$$

für alle  $\xi$ , sie ist damit die einzige Lösung des Problems.

### III.12. Wahrscheinlichkeit, daß die Irrfahrt überhaupt absorbiert wird

Die Wahrscheinlichkeit  $A(\xi, \eta)$ , daß eine von  $(\xi, \eta)$  ausgehende Irrfahrt in der oberen Halbebene nach einer beliebigen Anzahl von Schritten in einem beliebigen Punkt der Abszissenachse absorbiert wird, kann einmal aus der Relation

$$A(\xi, \eta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k, 0; \xi, \eta) \quad (12.1)$$

mit der Wahrscheinlichkeit (10.3) gewonnen werden. Zum anderen folgt sie auch aus der Reihe

$$A(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)}(\xi, \eta) \quad (12.2)$$

mit der Wahrscheinlichkeit (11.4). Aus den Gleichungen (12.2) und (11.4) folgt so nach Aufsummieren der Reihe und Ausrechnen des Integrals

$$A(\xi, \eta) = \frac{\sqrt{p_2 q_2}}{(2 p_2)^{\eta} |p_2 - q_2|} [p_2 + q_2 - |p_2 - q_2|]^{\eta} \cdot \left\{ \frac{2 \sqrt{p_2 q_2}}{p_2 + q_2 - |p_2 - q_2|} - \frac{p_2 + q_2 - |p_2 - q_2|}{2 \sqrt{p_2 q_2}} \right\} \quad (12.3).$$

Für den Fall  $p_2 \geq q_2$ , d. h. für den Fall einer Drift von der absorbierenden Achse fort, lautet die Gleichung (12.3) einfach

$$A(\xi, \eta) = \left( \frac{q_2}{p_2} \right)^{\eta} \quad (12.4),$$

für den Fall  $q_2 \geq p_2$ , also einer Drift zur Achse hin, folgt dagegen

$$A(\xi, \eta) = 1 \quad (12.5).$$

Wir fassen zusammen:

Die Irrfahrt wird mit der Wahrscheinlichkeit Eins absorbiert, falls die  $y$ -Komponente der Drift zur Achse hinweist, gleichgültig, in welchem endlichen Punkt die Irrfahrt gestartet ist. Bei einer Irrfahrt, bei der die  $y$ -Komponente der Drift von der Achse  $y = 0$  fortweist, hängt die Absorptionswahrscheinlichkeit (12.4) erstens von der Größe der Drift und zweitens vom Abstand des Startpunktes von der absorbierenden Linie ab. Mit größer werdendem Abstand wird die Absorptionswahrscheinlichkeit kleiner, für nichtverschwindende  $p_2$  und  $q_2$  und endliche  $\eta$  ist aber stets noch eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit vorhanden, daß die Irrfahrt die Achse irgendwann und irgendwo erreicht.



## Literatur

- [1] W. FELLER, An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. I. J. Wiley & Sons, Inc., New York 1950.
- [2] R. v. MISES, Vorlesungen aus dem Gebiet der angewandten Mathematik, I. Bd., Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fr. Deuticke Verlag, Leipzig 1931.
- [3] A. CHINTSCHIN, Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Erg. d. Math. II, 4. Springer-Verlag, Berlin 1933.
- [4] S. CHANDRASEKHAR, Stochastic Problems in Physics and Astronomy, Rev. of Mod. Phys. 15 (1943), p. 1—89.
- [5] R. COURANT, K. FRIEDRICH, H. LEWY, Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Math. Ann. 100 (1928), S. 32—74.
- [6] C. DOMB, On Multiple Returns in the Random Walk Problem, Proc. Cambr. Phil. Soc. 50 (1954), p. 586—591.
- [7] A. DVORETZKI, P. ERDÖS, Some Problems on Random Walk in Space, Proc. Sec. Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. (1951), p. 353—367.
- [8] W. EBERL, Ein Zufallsweg in einer Markoffschen Kette von Alternativen, Monatsh. Math. 58 (1954), S. 137—142.
- [9] F. G. FOSTER, I. G. GOOD, On a Generalisation of Pólya's Random-Walk Theorem, Quart. J. Math., Oxford, II. Ser., 4 (1933), p. 120—126.
- [10] E. HENZE, Beiträge zum Irrfahrtproblem, Dissertation TH Stuttgart, 1958.
- [11] E. HENZE, Lösung einiger Probleme aus der Theorie der diskreten Irrfahrt, ZAMM 39 (1959), S. 371—373.
- [12] W. H. MCCREA, A Problem on Random Walk, Math. Gaz. 20 (1936), p. 311—317.
- [13] W. H. MCCREA, F. J. W. WHIPPLE, Random Paths in Two and Three Dimensions, Proc. Royal Soc. Edinburgh LX (1939/40), p. 281—298.
- [14] G. PÓLYA, Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz, Math. Ann. 84 (1921), S. 149—160.
- [15] P. ROOS, Probleme der Gitterirrfahrt, Zulassungsarbeit TH Stuttgart, 1954.
- [16] A. STÖHR, Über einige lineare partielle Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, Math. Nachr. 3 (1950), S. 208—242, 295—315, 330—357.

Manuskripteingang: 23. 1. 1960

Anschrift: Dr. E. HENZE, Ulm, Burgunderweg 9

ZAMM 41 (1961) Heft 1/2, Seite 9—17

## Zwei Lehrsätze in der Operatorenrechnung

Von J. WASOWSKI

*In der vorliegenden Arbeit ist eine Methode zur Bestimmung der Ableitungsanfangswerte der gesuchten Oberfunktion angegeben. Diese Methode unterscheidet sich von der in der Literatur bekannten und vereinfacht die Berechnung. In dieser Arbeit ist auch gezeigt, wie man die Oberfunktionen der Gleichungen und der gesamten Gleichungssysteme finden kann, welche als Unterfunktionen gegeben sind. Es wird ebenfalls die Verbindung der Operatorenrechnung mit der klassischen Methode zur Auflösung der Differentialgleichungssysteme hergestellt.*

*A method is presented to determine the initial values of the derivatives of an unknown inverse Laplace transform. This method differs from the one known from the literature and leads to a simpler calculation. It is also shown how the inverse Laplace transforms of the equations or systems of equations given as Laplace transforms may be found. The operator calculus is being connected with the classical method of solving systems of differential equations.*

В настоящей работе дается метод для определения начальных значений производной от искомой первоначальной функции. Этот метод отличен от в литературе известного и упрощает вычисления. В работе показывается также, как можно получить первоначальные функции уравнений и систем целых систем уравнений, заданных в виде преобразованных решений систем дифференциальных уравнений.

## 1. Einleitung

Wendet man die  $\mathfrak{L}$ -Transformation ([1], [2], [4]) an, so kann man leicht beweisen, daß für die Oberfunktion  $f_{K\eta} = K \cdot \eta(t) = \text{const.}$ , deren Unterfunktion  $\mathfrak{L}[K]$  ist, folgender Zusammenhang eintritt

$$K = s \cdot \mathfrak{L}[K] \quad \text{bei } \sigma > 0 \quad \dots \dots \dots (1.1),$$

wo

$$\begin{array}{ll} s = \sigma + j\delta & \text{eine komplexe Veränderliche} \\ \eta(t) \equiv 1 & \text{Einheitsfunktion} \\ K & \text{ein konstanter Wert (Zahl) ist.} \end{array}$$

Es wird darauf hingewiesen, daß die in der Formel (1.1) auftretende Zahl „K“ nicht mehr zur  $t$ -Ebene, sondern zur  $s$ -Ebene gehört. Weiterhin werden wir genau darauf achten, zu welcher Ebene die Zahl „K“ (der reelle Wert) gehört. Die zur  $s$ -Ebene gehörende Zahl werden wir mehrmals durch den Ausdruck  $s \mathfrak{L}[K]$  ersetzen.



Setzt man in (1.1) voraus, daß  $K = 1$  ist, so erhält man

$$1 = s \cdot \mathfrak{L}[1] \quad \text{bei } \sigma > 0 \quad \dots \dots \dots (1.2).$$

Die in (1.2) auftretende Einheit gehört nicht mehr zur  $t$ -Ebene, sondern zur  $s$ -Ebene. Die zur  $s$ -Ebene gehörende Zahl „1“ werden wir mehrmals durch den Ausdruck  $s \mathfrak{L}[1]$  ersetzen.

Setzt man in (1.1)  $K = 0$ , so erhält man

$$0 = s \cdot \mathfrak{L}[0].$$

Da  $s \neq 0$ , folgt (vgl. [3])

$$\mathfrak{L}[0] = 0 \quad \dots \dots \dots (1.3).$$

Zieht man (1.1) bzw. (1.2) in Betracht, so kann man den bekannten Lehrsatz über die Differentiation in der  $t$ -Ebene folgenderweise ausdrücken.

Lehrsatz. Sind die Funktionen  $f(t)$  und ihre Ableitungen  $f^{(k)}(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, (n-1)$ , Oberfunktionen, und  $\mathfrak{L}[f(t)]$  die Unterfunktion von  $f(t)$ , dann

$$\mathfrak{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \cdot \mathfrak{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k} \cdot \mathfrak{L}[f^{(k)}(0+)] \quad \dots \dots \dots (1.4),$$

wo

$$f^{(0)}(0+) \equiv f(0+), \quad f^{(k)}(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, \dots, (n-1) \quad \dots \dots (1.4a).$$

Beweis. In Übereinstimmung mit der bekannten Formel ist<sup>1)</sup>

$$\mathfrak{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \cdot \mathfrak{L}[f(t)] - \sum_{k=1}^n f^{(k-1)}(0+) \cdot s^{n-k} \quad \dots \dots \dots (1.5).$$

Die hier auftretenden Werte (Zahlen)  $f^{(k-1)}(0+)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , gehören zur  $s$ -Ebene. In Übereinstimmung mit der Formel (1.1) können wir schreiben

$$f^{(k-1)}(0+) = s \mathfrak{L}[f^{(k-1)}(0+)] \cdot \eta(t) = s \mathfrak{L}[f^{(k-1)}(0+)]$$

wo die Bezeichnungen wie in (1.4a) sind. Berücksichtigt man das Obige in (1.5), so erhält man (1.4), was zu beweisen war.

Wir können auch die Formel (1.2) benutzen. Dann schreiben wir (1.5) in der Form

$$\mathfrak{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathfrak{L}[f(t)] - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \cdot f^{(k-1)}(0+) \cdot 1.$$

Statt der hier auftretenden Zahl „1“, die zur  $s$ -Ebene gehört, führen wir gemäß der Formel (1.2) das Produkt  $s \mathfrak{L}[1]$  d. h.

$$\mathfrak{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathfrak{L}[f(t)] - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \cdot f^{(k-1)}(0+) \cdot s \mathfrak{L}[1].$$

Hieraus folgt unmittelbar (1.4).

## 2. Der Anfangswert

Lehrsatz. 1. Tritt zwischen der Unterfunktion  $\mathfrak{L}[f(t)]$  der gegebenen Oberfunktion  $f(t)$  und der Unterfunktion  $\Phi(s)$  der gesuchten Oberfunktion  $\varphi(t)$  der Zusammenhang ein

$$A(s) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] = B(s) \cdot \mathfrak{L}[f(t)] \quad \dots \dots \dots (2.1),$$

wo

$$A(s) = \sum_{k=0}^n A_k s^k, \quad B(s) = \sum_{k=0}^m B_k s^k, \quad m = n - r, \quad r = 0, 1, \dots, n,$$

und  $A_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ),  $B_k$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) konstante Koeffizienten sind, dann

$$\varphi^{(p)}(0+) = \sum_{q=0}^p Q_q f^{(p-q)}(0+), \quad p = 0, 1, \dots \quad \dots \dots (2.2),$$

wo

$$Q_0 = \frac{B_n}{A_n} \quad \dots \dots \dots (2.2a),$$

$$Q_q = \frac{1}{A_n} \left[ B_{n-q} - \sum_{k=0}^{q-1} Q_k \cdot A_{n-q+k} \right], \quad q = 1, 2, \dots \quad \dots (2.2b),$$

und wo  $A_\nu = 0$  für  $0 > \nu > n$ ;  $B_\nu = 0$  für  $0 > \nu > m$ .







**Lehrsatz 1a.** Tritt zwischen der Unterfunktion  $\mathfrak{L}[1]$  der gegebenen Oberfunktion  $\eta(t) \equiv 1$  und der Unterfunktion  $\mathfrak{L}[\varphi(t)]$  der gesuchten Oberfunktion  $q(t)$  der Zusammenhang ein

$$A(s) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] = B(s) \cdot \mathfrak{L}[1] \quad \dots \dots \dots (2.6),$$

wo  $A(s)$  und  $B(s)$  wie im Lehrsatz 1 lauten, dann

$$\varphi^{(p)}(0+) = \frac{1}{A_n} \left[ B_{n-p} - \sum_{k=0}^{p-1} \varphi^{(k)}(0+) \cdot A_{n-p+k} \right], \quad p = 1, 2, \dots \dots \dots (2.7),$$

wo

$$\varphi^{(0)}(0+) \equiv \varphi(0+) = B_n/A_n$$

und  $A_p$  und  $B_p$  wie im Lehrsatz 1 sind.

**Beweis.** Der Lehrsatz 1a ergibt sich aus dem Lehrsatz 1, wo es genügt  $f(t) = \eta(t) \equiv 1$  voraussetzen. Dann nehmen die Anfangswerte (2.2) die Form (2.7) an.

Die Formeln (2.7) können ebenfalls unmittelbar aus (2.6) abgeleitet werden, indem man sich genau an die Beweise 1 und 2 des Lehrsatzes 1 hält.

Interessant sind hier die Zusammenhänge, welche sich aus den Zusammenhängen (2.5) ergeben, wenn wir  $f(t) = \eta(t) \equiv 1$  voraussetzen.

Wir erhalten

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=n}^n A_k \varphi^{(k-n)}(0+) &= B_n \\ \sum_{k=n-1}^n A_k \varphi^{(k-n+1)}(0+) &= B_{n-1} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{k=2}^n A_k \varphi^{(k-2)}(0+) &= B_2 \\ \sum_{k=1}^n A_k \varphi^{(k-1)}(0+) &= B_1 \\ \sum_{k=0}^n A_k \varphi^{(k)}(0+) &= B_0 \\ \sum_{k=0}^n A_k \varphi^{(k+1)}(0+) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.8).$$

in infinitum

Betreffs  $A_p$  und  $B_p$  siehe Beweis 1.

### 3. Integralreihe. Maclaurinsche Formel

Beim Beweisen des Lehrsatzes 1 hat man die Formel (2.3) erhalten, aus der man — für die Bedingungen, die bei den Entwicklungen solcher Typen gelten — die Oberfunktion  $q(t)$  bestimmen kann, ohne die Wurzeln  $A(s) = 0$  zu suchen.

Setzt man in dieser Formel  $f(t) = \eta(t) \equiv 1$  voraus, führt die hingewiesene Integration aus, und berücksichtigt — wie aus (2.2) folgt —, daß dann  $Q_p = \varphi^{(p)}(0+)$ ,  $p = 0, 1, \dots$ , ist, so erhält man

$$q(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(0+) \cdot \dots \dots \dots (3.1),$$

wo  $\varphi^{(p)}(0+)$ ,  $p = 0, 1, \dots$ , wie in den Formeln (2.7).

Die Formel (3.1) ist die bekannte MACLAURINSche Formel.

### 4. Oberfunktionen der Produkte von Polynomen und Unterfunktionen

**Lehrsatz 2.** Tritt zwischen der Unterfunktion  $\mathfrak{L}[f(t)]$  der gegebenen Oberfunktion  $f(t)$  und der Unterfunktion  $\mathfrak{L}[\varphi(t)]$  der gesuchten Oberfunktion  $q(t)$  ein Zusammenhang ein

$$A(s) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] = B(s) \cdot \mathfrak{L}[f(t)] \quad \dots \dots \dots (4.1),$$

wo

$$A(s) = \sum_{k=0}^m A_k s^k, \quad B(s) = \sum_{k=0}^m B_k s^k, \quad m = n - r, \quad r = 0, 1, \dots, n$$



und  $A_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) und  $B_k$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) konstante Koeffizienten sind, so ist die Oberfunktion des Zusammenhanges (4.1) eine Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^n A_k \varphi^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m B_k f^{(k)}(t) \quad (4.2)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi^{(p)}(0+) = \sum_{q=0}^p Q_q f^{(p-q)}(0+), \quad p = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (4.2a),$$

wo

$$Q_0 = \frac{B_n}{A_n}, \quad Q_q = \frac{1}{A_n} \left[ B_{n-q} - \sum_{k=0}^{q-1} Q_k \cdot A_{n-q+k} \right], \quad q = 1, 2, \dots, (n-1),$$

ebenso  $A_\nu = 0$  für  $0 > \nu > n$ ;  $B_\nu = 0$  für  $0 > \nu > m$  und wo  $A_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) und  $B_k$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) dieselben konstanten Koeffizienten sind, die in (4.1) auftreten, und  $\varphi^{(k)}(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , sind die Oberfunktionen.

Der umgekehrte Lehrsatz ist ebenfalls richtig. Das heißt: Wird die Differentialgleichung (4.2) mit den Anfangsbedingungen (4.2a) gegeben, so drückt der Zusammenhang (4.1) seine Unterfunktion aus.

Beweis. Gemäß dem in Formel (1.4) angegebenen Lehrsatz können wir schreiben

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} \left[ \sum_{k=0}^n A_k \varphi^{(k)}(t) \right] &= \left[ \sum_{k=0}^n A_k s^k \right] \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] - \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{q=0}^{n-j} A_{q+j} s^j \cdot \mathfrak{L}[\varphi^{(q)}(0+)] \right\}, \\ \mathfrak{L} \left[ \sum_{k=0}^n B_k f^{(k)}(t) \right] &= \left[ \sum_{k=0}^n B_k s^k \right] \cdot \mathfrak{L}[f(t)] - \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{q=0}^{n-j} B_{q+j} s^j \cdot \mathfrak{L}[f^{(q)}(0+)] \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man von dort

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=0}^n A_k s^k \right) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] &= A(s) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)], \\ \left( \sum_{k=0}^n B_k s^k \right) \cdot \mathfrak{L}[f(t)] &= B(s) \cdot \mathfrak{L}[f(t)] \end{aligned}$$

in (4.1) ein, wo wir vorläufig  $m = n$  voraussetzen, so erhalten wir

$$\mathfrak{L} \left[ \sum_{k=0}^n A_k \varphi^{(k)}(t) \right] + \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{q=0}^{n-j} A_{q+j} s^j \cdot \mathfrak{L}[\varphi^{(q)}(0+)] \right\} = \mathfrak{L} \left[ \sum_{k=0}^n B_k f^{(k)}(t) \right] + \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{q=0}^{n-j} B_{q+j} s^j \cdot \mathfrak{L}[f^{(q)}(0+)] \right\}.$$

Den obigen Zusammenhang schreiben wir in der Form

$$\mathfrak{L} \left[ \sum_{k=0}^n A_k \varphi^{(k)}(t) \right] + \sum_{j=1}^n s^j \cdot \mathfrak{L} \left[ \sum_{q=0}^{n-j} A_{q+j} \varphi^{(q)}(0+) - \sum_{q=0}^{n-j} B_{q+j} f^{(q)}(0+) \right] = \mathfrak{L} \left[ \sum_{k=0}^n B_k f^{(k)}(t) \right].$$

Für den Zusammenhang (4.1) gelten jedoch die Anfangsbedingungen (4.2a), Formel (2.2), ebenso die Zusammenhänge (2.5), wo wir hatten

$$\sum_{q=0}^{n-j} A_{q+j} \varphi^{(q)}(0+) = \sum_{q=0}^{n-j} B_{q+j} f^{(q)}(0+), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Berücksichtigt man das Obige, so erhalten wir weiterhin

$$\mathfrak{L} \left[ \sum_{k=0}^n A_k \varphi^{(k)}(t) \right] + \sum_{j=1}^n s^j \cdot \mathfrak{L}[0] = \mathfrak{L} \left[ \sum_{k=0}^n B_k f^{(k)}(t) \right].$$

Berücksichtigt man hier (1.3), so erhält man

$$\mathfrak{L} \left[ \sum_{k=0}^n A_k \varphi^{(k)}(t) \right] = \mathfrak{L} \left[ \sum_{k=0}^n B_k f^{(k)}(t) \right].$$

Hieraus folgt unmittelbar (4.2) für  $m = n$ .

Ist  $m < n$ , dann fehlen  $(n-m)$  Koeffizienten  $B_\nu$  ( $\nu = (m+1), (m+2), \dots, n$ ) im besprochenen Fall. Dann werden die  $(n-m)$  ersten Ableitungen der Funktion  $\varphi(t)$  gleich Null sein, d. h.  $\varphi^{(p)}(0+) = 0$  für  $p = 0, 1, \dots, (n-m)$ . Der Lehrsatz bleibt daher ebenfalls richtig für  $m < n$ .



Die umgekehrte Behauptung zum Lehrsatz 2 beweisen wir auf dieselbe Art wie den Lehrsatz 2. Als Ausgangspunkt nehmen wir (4.2), in der die  $\mathfrak{L}$ -Transformation angewendet wird, und weiterhin verfahren wir wie beim Beweisen des Lehrsatzes 2.

Lehrsatz 2a. Tritt zwischen der Unterfunktion  $\mathfrak{L}[1]$  der gegebenen Oberfunktion  $\eta(t) \equiv 1$  und der Unterfunktion  $\mathfrak{L}[\varphi(t)]$  der gesuchten Oberfunktion  $\varphi(t)$  der Zusammenhang ein

$$A(s) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] = B(s) \cdot \mathfrak{L}[1] \quad \dots \quad (4.3),$$

wo  $A(s)$  und  $B(s)$  wie im Lehrsatz 2 sind, dann ist die Oberfunktion des Zusammenhanges (4.3) eine Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^n A_k \varphi^{(k)}(t) = B_0 \quad \dots \quad (4.4)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi^{(p)}(0+) = \frac{1}{A_n} \left[ B_{n-p} - \sum_{k=0}^{p-1} \varphi^{(k)}(0+) \cdot A_{n-p+k} \right], \quad p = 1, 2, \dots, (n-1) \quad (4.4a),$$

wo

$$\varphi^{(0)}(0+) \equiv \varphi(0+) = B_n/A_n$$

ebenso  $A_p$  und  $B_p$  wie im Lehrsatz 2.

Der umgekehrte Lehrsatz ist ebenfalls richtig.

Beweis. Um den Lehrsatz 2a zu beweisen, genügt es, in (4.1) voranzusetzen, daß  $f(t) = \eta(t) \equiv 1$ . Dann nehmen die Zusammenhänge (4.1) und (4.2) die Form (4.3) und (4.4) an.

Den umgekehrten Lehrsatz beweisen wir folgendermaßen.

Wir wenden die  $\mathfrak{L}$ -Transformation auf die Differentialgleichung (4.4) mit den Anfangsbedingungen (4.4a) an. Wir erhalten

$$\mathfrak{L} \left[ \sum_{k=0}^n A_k \varphi^{(k)}(t) \right] = \mathfrak{L}[B_0] \quad \dots \quad (4.5).$$

Gemäß dem in Formel (1.4) angegebenen Lehrsatz können wir schreiben

$$\mathfrak{L} \left[ \sum_{k=0}^n A_k \varphi^{(k)}(t) \right] = \left[ \sum_{k=0}^n A_k s^k \right] \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] - \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{q=0}^{n-j} A_{q+j} s^j \cdot \mathfrak{L}[\varphi^{(q)}(0+)] \right\} \quad \dots \quad (4.6).$$

Weiterhin erhalten wir, wenn wir (4.5) und (4.6) in Betracht ziehen,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=0}^n A_k s^k \right) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] &= \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{q=0}^{n-j} A_{q+j} s^j \cdot \mathfrak{L}[\varphi^{(q)}(0+)] \right\} + \mathfrak{L}[B_0], \\ \left( \sum_{k=0}^n A_k s^k \right) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] &= \sum_{j=1}^n s^j \cdot \mathfrak{L} \left[ \sum_{q=0}^{n-j} A_{q+j} \varphi^{(q)}(0+) + B_0 \right]. \end{aligned}$$

Für den Zusammenhang (4.4) gelten jedoch die Anfangsbedingungen (4.4a), Formel (2.7), ebenso die Zusammenhänge (2.8), wo wir hatten

$$\sum_{q=0}^{n-j} A_{q+j} \varphi^{(q)}(0+) = B_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Weiterhin erhalten wir also

$$\left( \sum_{k=0}^n A_k s^k \right) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] = \sum_{j=1}^n s^j \cdot \mathfrak{L}[B_j + B_0].$$

Endgültig bekommen wir

$$\left( \sum_{k=0}^n A_k s^k \right) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] = \left( \sum_{k=0}^n B_k s^k \right) \cdot \mathfrak{L}[1]$$

im Falle  $m = n$ . Für den Fall  $m < n$  lautet der Beweis so wie vorher.

## 5. Anwendungen

Beispiel 5.1. Gegeben ist folgende Beziehung

$$(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) \cdot \Phi(s) = (s^2 - 3s + 2) \cdot F_1(s) \quad \dots \quad (5.1),$$

wo  $F_1(s) = (s-2)/s(s+1)$  die Unterfunktion der Oberfunktion  $f_1(t) = 3e^{-t} - 2$  ist. Zu finden seien die Anfangsbedingungen  $\varphi^{(p)}(0+)$ ;  $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , und die Differentialgleichungen, deren Integral die Oberfunktion  $\varphi(t)$  der Unterfunktion  $\Phi(s)$  ist, wobei das Integral die Anfangsbedingungen erfüllen muß, die aus der Unterfunktion  $\Phi(s)$  folgen.



Lösung 5.1a. Im untersuchten Fall haben wir

$$A_3 = 1, \quad A_2 = 6, \quad A_1 = 11, \quad A_0 = 6, \quad B_3 = 0, \quad B_2 = 1, \quad B_1 = -3, \quad B_0 = 2,$$

$$f_1(0+) = 1, \quad f_1'(0+) = -3, \quad f_1''(0+) = 3, \quad f_1'''(0+) = -3, \quad f_1^{(4)}(0+) = 3.$$

Gemäß den Formeln (2.2) mit (2.2a) und (2.2b) haben wir

$$\varphi^{(p)}(0+) = \sum_{q=0}^p Q_q f_1^{(p-q)}(0+), \quad p = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

$$Q_0 = \frac{B_3}{A_3}, \quad Q_q = \frac{1}{A_3} \left[ B_{3-q} - \sum_{k=0}^{q-1} Q_k \cdot A_{3-q+k} \right], \quad q = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Wir berechnen

$$Q_0 = 0, \quad Q_1 = 1, \quad Q_2 = -9, \quad Q_3 = 45, \quad Q_4 = -177, \quad Q_5 = 621$$

und dann die gesuchten Anfangswerte

$$\varphi(0+) = 0, \quad \varphi'(0+) = 1, \quad \varphi''(0+) = -12, \quad \varphi'''(0+) = 75, \quad \varphi^{(4)}(0+) = -342, \quad \varphi^{(5)}(0+) = 1317.$$

Jetzt schreiben wir den gegebenen Zusammenhang in der Gestalt

$$(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] = (s^2 - 3s + 2) \cdot \mathfrak{L}[f_1(t)].$$

Gemäß Lehrsatz 2 ist die Differentialgleichung

$$\varphi'''(t) + 6\varphi''(t) + 11\varphi'(t) + 6\varphi(t) = f_1'(t) - 3f_1'(t) + 2f_1(t)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi(0+) = 0, \quad \varphi'(0+) = 1, \quad \varphi''(0+) = -12$$

die Oberfunktion der gegebenen Unterfunktion (5.1).

Zieht man hier  $f_1(t)$  in Betracht und führt die hingewiesene Differentiation aus, so erhält man die Differentialgleichung

$$\varphi'''(t) + 6\varphi''(t) + 11\varphi'(t) + 6\varphi(t) = -4 + 18e^{-t},$$

wobei

$$\varphi(0+) = 0, \quad \varphi'(0+) = 1, \quad \varphi''(0+) = -12.$$

Lösung 5.1b. Die gesuchten Anfangswerte können noch auf eine andere Art erhalten werden. Der gegebene Zusammenhang kann anders geschrieben werden, und zwar

$$(s^2 + 3s + 2) \cdot \Phi(s) = (s^2 - 3s + 2) \cdot F_2(s) \dots \dots \dots (5.2),$$

wo  $F_2(s) = \frac{s-2}{s(s-1)(s+2)}$  die Unterfunktion der Oberfunktion  $f_2(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{5}{6}e^{-3t} - \frac{2}{3}$  darstellt.

Gemäß den Formeln (2.2a) und (2.2b), wo

$$A_2 = 1, \quad A_1 = 3, \quad A_0 = 2, \quad B_2 = 1, \quad B_1 = -3, \quad B_0 = 2 \quad \text{und} \quad n = 2$$

ist, berechnen wir

$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = -6, \quad Q_2 = 18, \quad Q_3 = -42, \quad Q_4 = 90, \quad Q_5 = 186.$$

Weiterhin berechnen wir

$$f_2(0+) = 0, \quad f_2'(0+) = 1, \quad f_2''(0+) = -6, \quad f_2'''(0+) = 21, \quad f_2^{(4)}(0+) = -66, \quad f_2^{(5)}(0+) = 201$$

und schließlich bekommen wir gemäß der Formel (2.2) dieselben Anfangswerte wie in Lösung 5.1a.

Jetzt schreiben wir den gegebenen Zusammenhang in der Gestalt

$$(s^2 + 3s + 2) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] = (s^2 - 3s + 2) \cdot \mathfrak{L}[f_2(t)].$$

Gemäß Lehrsatz 2 ist die Differentialgleichung

$$\varphi''(t) + 3\varphi'(t) + 2\varphi(t) = f_2''(t) - 3f_2'(t) + 2f_2(t)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi(0+) = 0, \quad \varphi'(0+) = 1$$

die Oberfunktion der gegebenen Unterfunktion (5.2).

Zieht man hier  $f_1(t)$  in Betracht und führt die hingewiesene Differentiation aus, so erhält man die Differentialgleichung

$$\varphi''(t) + 3\varphi'(t) + 2\varphi(t) = -\frac{4}{3} + 9e^{-t} - 16\frac{2}{3}e^{-3t},$$

wobei

$$\varphi(0+) = 0, \quad \varphi'(0+) = 1.$$



Lösung 5.1c. Da es gleich ist, welche Funktion in der gegebenen Beziehung ausgeschieden wird, so ist es von Vorteil, wenn wir die konstante Funktion ausscheiden. Dadurch wird die Berechnung der Anfangswerte vereinfacht.

Nun schreiben wir den vorhergegebenen Zusammenhang in der Form

$$s(s^4 + 7s^3 + 17s^2 + 17s + 6) \cdot \Phi(s) = (s^3 - 5s^2 + 8s - 4) \cdot 1.$$

Statt der hier auftretenden Zahl 1 führen wir gemäß der Formel (1.1) das Produkt  $s \mathfrak{L}[1]$ . Wir erhalten

$$(s^4 + 7s^3 + 17s^2 + 17s + 6) \cdot \mathfrak{L}[\varphi(t)] = (s^3 - 5s^2 + 8s - 4) \cdot \mathfrak{L}[1] \quad \dots (5.3).$$

Gemäß den Formeln (2.7), wo  $n = 4$ , berechnen wir  $\varphi^{(p)}(0+)$ ,  $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , und bekommen dasselbe Resultat für die Anfangsbedingungen wie in Lösungen 5.1a und 5.1b.

Weiterhin ist gemäß dem Lehrsatz 2 die Differentialgleichung

$$\varphi^{(4)}(t) + 7\varphi'''(t) + 17\varphi''(t) + 17\varphi'(t) + 6\varphi(t) = \eta'''(t) - 5\eta''(t) + 8\eta'(t) - 4\eta(t)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi(0+) = 0, \quad \varphi'(0+) = 1, \quad \varphi''(0+) = -12, \quad \varphi'''(0+) = 75$$

die Oberfunktion der gegebenen Unterfunktion (5.3), und daher, weil alle Ableitungen der Einheitsfunktion  $\eta(t)$  gleich Null sind

$$\varphi^{(4)}(t) + 7\varphi'''(t) + 17\varphi''(t) + 17\varphi'(t) + 6\varphi(t) = -4,$$

wobei

$$\varphi(0+) = 0, \quad \varphi'(0+) = 1, \quad \varphi''(0+) = -12, \quad \varphi'''(0+) = 75.$$

Wie hieraus folgt, gibt es eine größere Anzahl von Differentialgleichungen, die zu derselben Unterfunktion der gesuchten Oberfunktion führen. Die gesuchte Oberfunktion  $\varphi(t)$  ist jedoch nur eine und in jedem Fall immer dieselbe.

Beispiel 5.2. Gegeben sei das Differentialgleichungs-System

$$\left. \begin{aligned} 4x' + 7x - 4y' - 9y - 2z' - 5z &= 1, \\ 6x' + 9x - 5y' - 10y - 3z' - 6z &= t, \\ 2x' + x + 3y + 2z' + 7z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (5.4),$$

wo

$$x \equiv x(t), \quad y \equiv y(t), \quad z \equiv z(t), \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0.$$

Man soll die Unterfunktionen und Oberfunktionen bei den Umbildungen des Differentialgleichungssystems (5.4) angeben, wobei man die  $\mathfrak{L}$ -Transformation anwendet und der Reihe nach die Unbekannten  $Z(s)$  und  $Y(s)$  eliminiert.

Lösung. Wendet man die  $\mathfrak{L}$ -Transformation auf das Differentialgleichungs-System (5.4) an, so erhält man nach der Elimination von  $Z(s)$

$$\left. \begin{aligned} (12s^2 + 54s + 54) \cdot X(s) - (8s^2 + 40s + 48) \cdot Y(s) &= (2s + 7) \cdot \mathfrak{L}[1], \\ (18s^2 + 75s + 69) \cdot X(s) - (10s^2 + 46s + 52) \cdot Y(s) &= \frac{2s + 7}{s} \cdot \mathfrak{L}[1] \end{aligned} \right\} \quad (5.5a).$$

Gemäß dem Lehrsatz 2, ist das Differentialgleichungs-System

$$\begin{aligned} 12x'' + 54x' + 54x - 8y'' - 40y' - 48y &= 7, \\ 18x'' + 75x' + 69x - 10y'' - 46y' - 52y &= 2 + 7t \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = -\frac{5}{6}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{3}{2}$$

die Oberfunktion des Gleichungs-Systems (5.5a).

Eliminiert man weiterhin  $Y(s)$  aus dem Gleichungs-System (5.5a), so bekommt man

$$(6s^4 + 36s^3 + 66s^2 + 36s) \cdot X(s) = (-5s^3 - 19s^2 - 6s + 24) \cdot \mathfrak{L}[1] \quad \dots (5.6a).$$

Gemäß dem Lehrsatz 2, ist die Differentialgleichung

$$6x''(t) + 36x'''(t) + 66x''(t) + 36x'(t) = 24$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = -\frac{5}{6}, \quad x''(0) = \frac{11}{6}, \quad x'''(0) = -\frac{17}{6}$$

die Oberfunktion der Gleichung (5.6a).



Beispiel 5.3. An den elektrischen Stromkreis (Bild 1a), der keine Energie in der Induktivität enthält, wird die Spannung  $u = U e^{-at}$  gelegt, wo „ $U$ “ und „ $a$ “ konstante, reelle Werte sind.

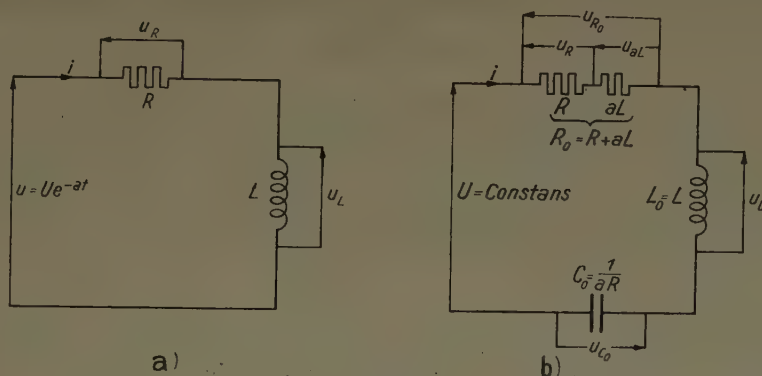


Bild 1

Man soll den Stromkreis durch einen anderen ersetzen, an den konstante Spannung gelegt wird, so daß der Verlauf des Stromes derselbe bleibt wie im Stromkreis aus Bild 1a.

Lösung. Für den Stromkreis aus Bild 1a schreiben wir

$$L i' + R i = U e^{-at},$$

wo

$$i(0) = 0.$$

Wendet man die  $\mathcal{L}$ -Transformation an, so erhalten wir

$$(Ls + R) \cdot I(s) = \frac{U}{s + a},$$

und weiterhin

$$\left[ Ls + (R + aL) + \frac{1}{\frac{1}{aR} \cdot s} \right] \cdot \mathcal{L}[i(t)] = \mathcal{L}[U] \quad \dots \quad (5.7a).$$

Die Integro-Differentialgleichung

$$L_0 i' + R_0 i + \frac{1}{C_0} \int_0^t i dt = U,$$

wo

$$i(0) = 0$$

und

$$L_0 = L, \quad R_0 = R + aL, \quad C_0 = \frac{1}{aR},$$

ist die Oberfunktion der Gleichung (5.7a).

Der gesuchte elektrische Stromkreis besteht aus Elementen  $R_0$ ,  $L_0$ ,  $C_0$  und ist in Bild 1b dargestellt.

Statt also den Stromkreis aus Bild 1a mit der sich gemäß der Exponentialfunktion  $U e^{-at}$  veränderlichen Spannung zu untersuchen, können wir den Stromkreis aus Bild 1b untersuchen, der auf konstante Spannung „ $U$ “ eingeschaltet ist. In beiden Stromkreisen ist der Verlauf des Stromes  $i(t)$ , der Spannung  $u_R(t)$  und der Spannung  $u_L(t)$  derselbe.

### Literatur

- [1] M. F. GARDNER and J. L. BARNES, Transients in Linear Systems, Vol. I, New York 1950, J. Wiley & Sons
- [2] М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного Москва-Ленинград 1951.
- [3] J. MIKUSINSKI, Rachunek operatorów, Warszawa 1953, P.A.N.  
Deutsche Übersetzung: Operatorenrechnung, Berlin 1957 (d. Hsg.).
- [4] H. SCHULZ, Über Wesen, Sinn und Zweck der Laplace-Transformation. Sonderdruck aus Telegraphen-Fernsprech-, Funk- und Fernseh-Technik. Hefte 4, 5 und 6 (1940) sowie 4 und 5 (1941), Berlin.

Manuskripteingang: 10. 2. 1960

Anschrift: Prof. Dr. Ing. J. WĄSOWSKI, Politechnika Śląska, Katedra Elektrotechniki Ogólnej A, Gliwice (Polen)



# Über Geradenhüllbahnen einer Konchoidenbewegung

Von R. BEREIS

*In nachstehender Arbeit werden Geradenhüllbahnen bei Konchoidenbewegungen betrachtet, also bei jenen ebenen Zwangsläufen, bei denen eine Gerade der Gangebene während des ganzen Bewegungsablaufes durch einen festen Punkt der Rastebene gleitet. Die Eigenschaften der Geradenhüllbahnen werden durch räumliche Betrachtung mit Hilfe der Netzprojektion abgeleitet. Schließlich werden Aussagen über Geradenhüllbahnen bei speziellen Getrieben gemacht, insbesondere bei der Kurbelschleife und bei dem Schleifschieber.*

*The straight line envelopes of conchoidal motion are considered. Their properties are deduced from three-dimensional considerations with the help of netzprojections. The results are applied to special gears, in particular to the slider-crank mechanism and to the conchoidograph (i. e. a mechanism that has two sliding pairs and two hinges).*

В настоящей работе рассматриваются траектории в виде огибающих прямых при конхоидальных движениях, т. е. тех принудительных движениях, у которых некоторая прямая подвижной плоскости в течении всего движения скользит через некоторую фиксированную точку неподвижной плоскости. Свойства рассматриваемых траекторий выводятся при помощи пространственных рассуждений. Наконец даются некоторые сведения о траекториях у специальных механизмов, в частности у кулисного четырёхзвенника и у четырёхзвенного механизма с двумя вращательными и двумя поступательными парами.

## 1. Einleitung

Die Untersuchung ebener Figuren und Konfigurationen kann in gewissen Fällen bekanntlich dadurch wesentlich vereinfacht werden, daß man das zu untersuchende zweidimensionale Gebilde  $K_2$  als Projektion eines dreidimensionalen Gebildes  $K_3$  auffaßt und sodann zufolge der Eigenschaften des  $K_3$  und der zugrundegelegten Abbildung Aussagen über das  $K_2$  macht. Durch diese Vorstellung ist es häufig möglich, geometrische Eigenschaften des  $K_2$  in außerordentlich übersichtlicher und anschaulicher Weise zu erkennen.

Vorliegende kleine Note soll einige Eigenschaften der Fußpunktkurven ebener Kurven mit Hilfe der Netzprojektion ableiten. Dabei wird sich ein Zusammenhang mit einem speziellen ähnlich-veränderlichen ebenen System ergeben, bei dem alle Punkte auf Kreisen durch einen festen Punkt laufen, während jede Gerade ein Strahlbüschel erfüllt. Durch Betrachtungen dieses ähnlich-veränderlichen ebenen Systems lassen sich wieder Aussagen über Geraden-Hüllbahnen bei Konchoidenbewegungen machen, also bei Bewegungen, bei denen eine feste Gerade der Gangebene während des gesamten Bewegungsvorganges durch einen festen Punkt der Rastebene gleitet.

## 2. Die Netzprojektion

Es sei  $\mathfrak{S}(p)$  eine euklidische Rechtsschraubung mit dem Parameter  $p$  und der (stets lotrecht gedachten) Schraubachse  $a$ , ferner  $\pi$  eine Ebene normal zu  $a$ . Die Schraubtangente  $t$  aller Punkte von  $\pi$  werden sodann als Abbildungsmittel verwendet. Man spricht von einer „Netzprojektion“, da die ausgezeichneten Schraubtangente  $t$  mit den Strahlen eines gewissen Drehnetzes übereinstimmen, das die Schraubachse  $a$  als Hauptstrahl und die Ebene  $\pi$  als Mitten-ebene besitzt. Alle „Projektionsstrahlen“  $t$  schneiden zwei konjugierte hochkomplexe Minimalgeraden, die in imaginären Parallelebenen zu  $\pi$  im Abstand  $\pm pi$  von  $\pi$  liegen. Von dieser schon vielfach untersuchten Abbildung seien folgende Eigenschaften erwähnt [1], [2], [3], [4], [5]:

### a) Netzriß eines Punktes

Durch jeden Punkt  $P$  des Raumes geht genau ein Strahl des Drehnetzes, das der Abbildung zu Grunde gelegt wird. Jener Punkt von  $\pi$ , dessen Schraubtangente dieser „Projektionsstrahl“ ist, wird als Netzriß  $P^n$  von  $P$  bezeichnet.

Faßt man die Bildebene  $\pi$  als GAUSSSCHE Zahlenebene mit dem Ursprung  $O$  in der Mitte des Drehnetzes auf, versteht man unter  $P'$  den Normalriß von  $P(x, y, z)$  —  $x, y, z$  seien inhomogene kartesische Punktkoordinaten — auf  $\pi$ , bezeichnet man ferner jene komplexe Zahl, die einen Punkt von  $\pi$  beschreibt, mit demselben lateinischen Großbuchstaben, wie den Punkt selbst, und setzt man schließlich  $z = \operatorname{tg} \zeta$  ( $\zeta$  = Winkelkote von  $P$ ), so gilt für  $p = 1$

$$P^n = P' \cos \zeta \cdot e^{-i\zeta} = \frac{P' \cos \zeta}{\cos \zeta + i \sin \zeta} = \frac{P'}{1 + i \operatorname{tg} \zeta} = \frac{P'}{1 + iz} = \frac{P'}{1 + iz} \cdot \frac{x + iy}{x + iy} \dots (1).$$

### b) Netzriß einer Kurve

Soll eine Raumkurve  $c$  abgebildet werden, so legt man durch  $c$  jene Strahlfläche  $\Phi$ , die dem (Abbildungs-)Drehnetz angehört. Die Spurkurve von  $\Phi$  wird als Netzriß  $c^n$  von  $c$  angesprochen.

Ist  $c$  insbesondere eine Gerade  $g$  allgemeiner Lage, so besteht  $\Phi$  aus der einen Erzeugenden-schar einer gewissen Fläche 2. Ordnung mit horizontalen Kreisschnitten. Der Netzriß  $g^w$  von  $g$  ist daher im allgemeinen ein Kreis durch den Spurpunkt  $G$  von  $g$ . Für ein Auge auf der Schraubachse im Abstand  $p$  von  $\pi$  sei  $G_u^c$  der Fluchtpunkt von  $g$  und  $G_u^x$  ihr Drehfluchtpunkt (= Netzriß  $G_u^w$  des Fernpunktes  $G_u$  von  $g$ ). Dann gilt, für  $p = 1$ ,

$$g^w = (G \cos \zeta - G_u^c \sin \zeta) = \frac{G - z G_u^c}{1 + z i} = \frac{G + z i G_u^x}{1 + z i} \quad \dots \dots \dots (2).$$

Der Bildkreis  $g^w$  von  $g$  besitzt somit die Strecke  $GG_u^w$  als Durchmesser. Sein Mittelpunkt  $M$  ist gegeben durch

$$M = \frac{1}{2} (G + G_u^w) \quad \dots \dots \dots (3)$$

und für irgend einen Punkt  $P$  von  $g$  gilt

$$\sphericalangle G G_u^w P^w = \zeta \quad \dots \dots \dots (4).$$

Kennt man von der Geraden  $g$  ihre PLÜCKER-Koordinaten  $p_i$ , so kann man für den Netzriß  $g^w$  von  $g$  schreiben [6]

$$\left. \begin{aligned} g^w &= \frac{1}{p_3} \cdot \frac{p_1 z - p_5 + i(p_2 z + p_4)}{1 + z i}, \\ M &= \frac{1}{2 p_3} [p_2 - p_5 - i(p_1 - p_4)], \\ r &= \frac{1}{2 p_3} \sqrt{(p_2 + p_5)^2 + (p_1 + p_4)^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (5).$$

Sonderfälle:

$\alpha$ ) Für Gerade normal zur Bildebene  $\pi$  gilt  $G_u^c = G_u^w = O$ . Daher bilden sich die  $\infty^2$  Geraden normal zu  $\pi$  auf die Kreise des Kreisbündels  $O$  ab.

$\beta$ ) Der Netzriß einer Geraden parallel zur Bildebene ist wieder eine Gerade. Wird eine solche horizontale Gerade in der Richtung der Schraubachse  $a$  verschoben, dann dreht sich ihr Netzriß um den Lotfußpunkt des Lotes aus  $O$  auf  $g'$ . Dieser Lotfußpunkt ist naturgemäß der Netzriß der durch die horizontale Gerade normal zu  $\pi$  gelegten Ebene.

$\gamma$ ) Für einen Netzstrahl  $t$  gilt  $P^w = G$ , d. h. der Netzriß eines Netzstrahles ist sein Spurpunkt.

### c) Netzriß einer Fläche

Soll eine Fläche  $\psi$  abgebildet werden, so bestimmt man jene  $\psi$  berührende Strahlfläche  $\Phi$ , die dem Abbildungsnetz angehört. Die Berührkurve  $u$  zwischen  $\Phi$  und  $\Psi$  nennt man den wahren Netzumriß von  $\Psi$ . Das Netzbild  $u^w$  von  $u$  (= Spurkurve von  $\Phi$ ) wird als scheinbarer Netzumriß oder kurz als Netzriß  $\Psi^w$  von  $\Psi$  bezeichnet.

Das Netzbild  $c^w$  einer Flächenkurve  $c$  von  $\Psi$  berührt so oft den Netzriß  $u^w$  von  $\Psi$ , wie  $c$  den wahren Netzumriß  $u$  schneidet.

Ist  $\Psi$  insbesondere eine Ebene  $\mathfrak{P}(x, y, z) - x, y, z$  seien inhomogene kartesische Ebenenkoordinaten — so liegt in  $\mathfrak{P}$  genau ein Strahl des Abbildungsnetzes. Der Spurpunkt dieses „Projektionsstrahles“ wird als Netzriß  $\mathfrak{P}^w$ , der Netzstrahl selbst als wahrer Netzumriß von  $\mathfrak{P}$  bezeichnet. Der Punkt  $\mathfrak{P}^w$  wird von der Drehflucht  $e_u^x$  von  $\mathfrak{P}$  aus der Bildspur  $e_1$  ausgeschnitten. Für  $p = 1$  gilt

$$\mathfrak{P}^w = \frac{-1 + z i}{x - y i} \quad \dots \dots \dots (6).$$

Sonderfälle:

$\alpha$ ) Liegt eine Ebene  $\mathfrak{P}$  parallel zur Bildebene, dann ist ihre Ferngerade ihr wahrer Netzumriß. Wie aus (1) unmittelbar abzulesen ist, gilt:

Jedes ebene, zu  $\pi$  parallele Feld  $\mathfrak{E}$  wird durch die Netzprojektion auf ein ähnliches Feld  $\mathfrak{E}^w$  in  $\pi$  abgebildet, das aus dem Grundriß  $\mathfrak{E}'$  durch die Drehstauchung  $(O; \cos \beta \cdot e^{-i\beta})$  hervorgeht.

$\beta$ ) Der Netzriß einer Ebene normal zur Bildebene ist der Lotfußpunkt auf ihrer Spur in  $\pi$  aus  $O$ . Insbesondere ist der Mittelpunkt  $O$  des Abbildungsnetzes der Netzriß aller Ebenen durch den Hauptstrahl des Netzes (=  $z$ -Achse).



## 3. Netzriß eines lotrechten Zylinders

Ist  $c$  die Basiskurve eines lotrechten Zylinders  $\mathfrak{Z}$  ( $c = \mathfrak{Z}'$ ), so erhält man den Netzumriß  $\mathfrak{Z}^w$  von  $\mathfrak{Z}$  als Fußpunktkurve von  $c$  in bezug auf die Netzmitte  $O$  (Bild 1). Die Gesamtheit ( $T$ ) der Berührungspunkte  $T$  der den Zylinder  $\mathfrak{Z}$  berührenden Netzstrahlen bilden den wahren Netzumriß  $u$  von  $\mathfrak{Z}$  ( $u' = c'$ ).

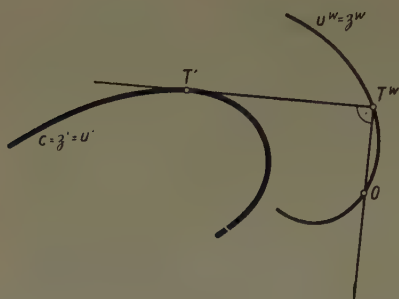


Bild 1

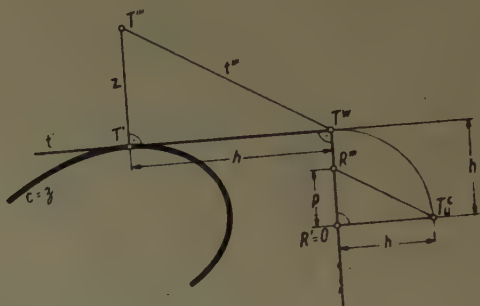


Bild 2

Legt man, wie Bild 2 zeigt, die zu  $\pi$  normale Ebene durch einen  $\mathfrak{Z}$  berührenden Netzstrahl  $t$  und die Parallelebene durch die Schraubachse  $a$  um, so erkennt man zufolge der Ähnlichkeit der Dreiecke  $T' T'' T'''$  und  $O T_u^c R'''$  die für den wahren Netzumriß von  $\mathfrak{Z}$  gültigen Beziehungen

$$T' = (h + \dot{h} i) e^{i\varphi}, \quad z = \frac{p \dot{h}}{h} \dots \dots \dots (7),$$

wobei  $h = h(\varphi)$  die Basiskurve  $c$  in polaren Speerkoordinaten bedeutet.

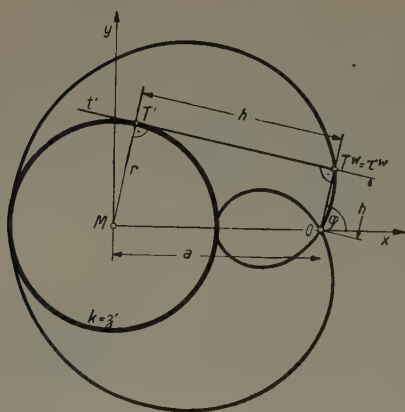


Bild 3

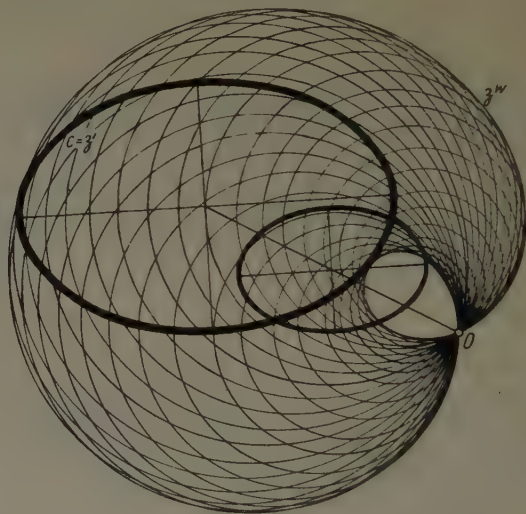


Bild 4

Beispiel: Ist  $\mathfrak{Z}$  ein lotrechter Drehzylinder mit dem Basiskreis  $k(M, r)$  und wird  $M = -a$  gewählt, so gilt  $h = r - a \cos \varphi$ .

Der Netzumriß  $\mathfrak{Z}^w$  ist demnach eine PASCALSCHNECKE (Bild 3) mit dem singulären Punkt  $O$ , während nach (7) der wahre Netzumriß ( $T$ ) durch

$$T' = r e^{i\varphi} - a, \quad z = p a \frac{\sin \varphi}{r - a \cos \varphi}$$

beschrieben wird. In karthesischen Normalkoordinaten mit dem Ursprung in  $M$  lauten daher die Umrißgleichungen

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \frac{a p \sin \varphi}{r - a \cos \varphi}$$

oder

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = (1 + t^2) [r - a + t^2 (r + a)] : r (1 - t^2) [r - a + t^2 (r + a)] : 2 r t [r - a + t^2 (r + a)] : 2 a p t (1 + t^2),$$

wobei  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$  gesetzt wurde. ( $T$ ) ist demnach eine rationale Raumkurve 4. Ordnung.

Läßt man einzelne Punkte  $P$  auf  $\mathfrak{Z}$  Kurven ( $P$ ) durchwandern und bildet deren Netzrisse ( $P^w$ ), so erhält man Erkenntnisse über geometrische Eigenschaften des Netzrisse  $\mathfrak{Z}^w$ :

a) Verschiebt man einen Punkt  $P$  der Basiskurve  $c$  in  $z$ -Richtung, so beschreibt er eine Erzeugende  $e$  von  $\mathfrak{Z}$ . Dabei beschreibt  $P^w$  einen Kreis durch  $O$  mit der Mitte  $\frac{P}{2}$ , der  $\mathfrak{Z}$  berührt:

Es gibt  $\infty^1$  Kreise durch  $O$ , die  $\mathfrak{Z}^w$  berühren und deren Mitten auf einer Kurve  $c_m$  liegen, die aus  $c$  durch eine zentrische Stauchung 1:2 von  $O$  aus hervorgeht. (Bild 4 zeigt diese Verhältnisse bei einem elliptischen lotrechten Zylinder. Der Netzumriß ist in diesem besonderen Fall eine bizirkuläre rationale Quartik mit einem reellen singulären Punkt in  $O$ .)

b) Verschiebt man eine Tangente von  $c$  in  $z$ -Richtung, so überstreicht sie eine Tangentialebene  $\tau$  von  $\mathfrak{Z}$ . Dabei durchläuft ihr Netzriß ein Geradenbüschel, dessen Träger der Netzriß  $\tau^w$  von  $\tau$ , also der Lotfußpunkt von  $O$  auf der Tangente ist (Bild 3).

c) Verschiebt man die Basisebene  $c$  in  $z$ -Richtung, so erhält man die Schichtenlinien ( $s$ ) des Zylinders  $\mathfrak{Z}$ . Dabei erhält man als deren Netzrisse ( $s^w$ ) eine Drehstreckchar von ähnlichen Kurven aus  $O$ . Jede dieser Kurven  $s^w$  berührt  $\mathfrak{Z}^w$  so oft, als die Schichtenlinie  $s$  den wahren Netzumriß von  $\mathfrak{Z}$  schneidet.

In dem oben erwähnten Sonderfall eines lotrechten elliptischen Zylinders erhält man eine Drehstreckchar von ähnlichen Ellipsen, die die Fußpunktcurve von  $c$  bez.  $O$  doppelt berühren (Bild 5).

Die einzelnen Kurven  $s^w$  kann man als Phasen eines speziellen ähnlich veränderlichen Systems auffassen, bei dem alle Punkte Kreisbahnen durch  $O$  und alle Geraden gewisse Strahlbüschel durchlaufen (der Büschelträger ist der Netzriß der durch die entsprechende Raumgerade gehenden Ebene normal zu  $\pi$ ).

So liegen in dem oben herangezogenen Beispiel die Mitten aller Ellipsen der Drehstreckchar auf einem Kreis durch  $O$  (Bild 5), während alle Haupt- wie Nebenachsen, ja irgendwelche homolog liegenden Geraden der einzelnen Ellipsen stets durch je einen festen Punkt gehen.

Zieht man daher an die einzelnen Kurven  $s^w$  aus irgend einem Punkt  $H$  von  $\mathfrak{Z}^w$  Tangenten, so gehen homolog liegende Tangenten durch die gleiche Drehstreckung um  $O$  auseinander hervor, wie die zugehörigen Kurven  $s^w$ . Die Berührungspunkte liegen dabei stets auf einem Kreis durch  $O$ . In Bild 5 ist das im Falle des elliptischen lotrechten Zylinders für einzelne Ellipsen  $s^w$  durchgezeichnet.

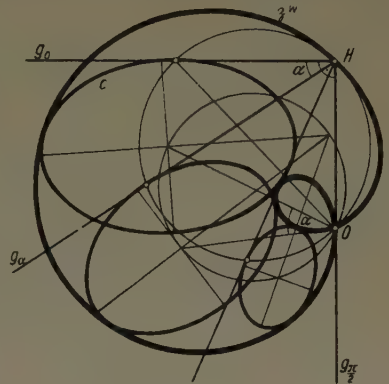


Bild 5

#### 4. Geradenhüllbahnen bei einer Konchoidenbewegung

Bringt man in einem Punkt  $O$  eine drehbar gelagerte Hülse an, durch die eine Führungsstange  $a$  gleiten möge, und führt man irgendeinen Punkt  $H$  von  $a$  längs einer Kurve ( $H$ ), so umhüllt eine in  $H$  normal zu  $a$  mit  $a$  fest verbundene Gerade  $g_0$  die negative Fußpunktcurve ( $g_0$ ) von ( $H$ ) in bezug auf  $O$ . Eine weitere in  $H$  mit  $a$  fest verbundene Gerade  $g_\alpha$  ( $\angle g_0 g_\alpha = \alpha$ ) hat bei diesem ebenen Zwanglauf als Hüllbahn ( $g_\alpha$ ) eine Kurve, die aus ( $g_0$ ) durch die Drehstreckung ( $O; \cos \alpha \cdot e^{i\alpha}$ ) hervorgeht. Das ist unmittelbar einzusehen, wenn man ( $H$ ) mit  $\mathfrak{Z}^w$  und ( $g_0$ ) mit  $c$  identifiziert.

Da die Hüllbahnen paralleler Geraden bei irgendeinem Zwanglauf Parallelkurven sind, gilt somit der Satz:

„Bei einer Konchoidenbewegung ist die Hüllbahn ( $g$ ) einer Geraden  $g$  der Gangebene in der Rastebene im allgemeinen eine Parallelkurve der negativen Fußpunktcurve  $c$  der Bahn ( $H$ ) eines beliebigen Punktes  $H$  der Führungsstange  $a$  in bezug auf die (als Punkt zu denkende) Führungshülse  $O$ , oder die Parallelkurve einer aus  $c$  durch eine Drehstreckung um  $O$  hervorgegangenen ähnlichen Kurve; alle zur Führungsstange parallelen Geraden der Gangebene umhüllen naturgemäß Kreise, da  $a$  selbst ein Strahlbüschel durchläuft.“

##### 1. Beispiel: Kurbelschleife

Zwingt man einen Punkt  $H$  der Führungsstange  $f$  mittels einer Kurbel  $MH$  ( $M$  = Kurbel-lager) auf einen Kreis, so erhält man die Bewegung des sogenannten Kurbelschleifengetriebes.

a) Führungshülse  $O$  innerhalb des Bahnkreises von  $H$  (Umlaufende Kurbelschleife)

Die Strahlen des Büschels  $H$  umhüllen ähnliche, monofokale Ellipsen, die eine Drehstreckchar um  $O$  bilden (Bild 6). Jede dieser Hüllbahn-Ellipsen berührt den Bahnkreis von  $H$  doppelt. Die Geradenhüllbahnen bei einer schwingenden Schleifkurbel sind also i. a. Ellipsen oder Parallel-



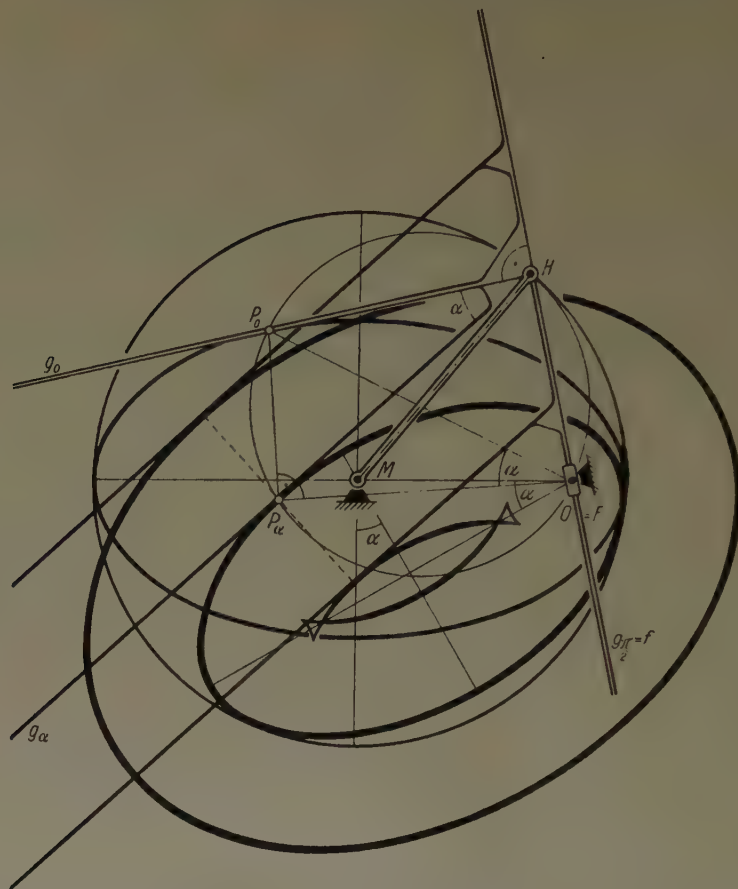


Bild 6

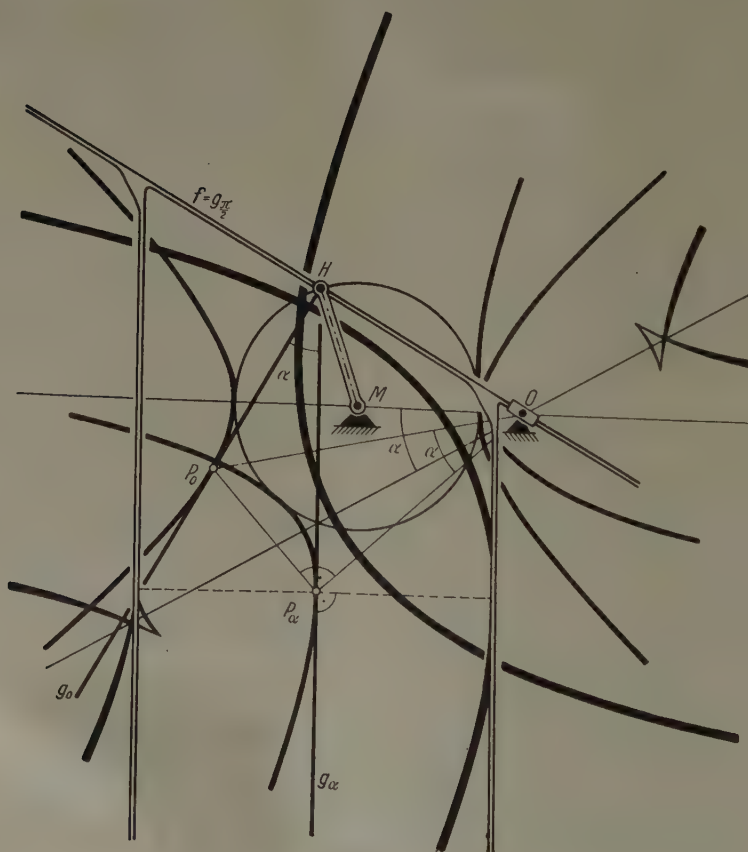


Bild 7

kurven von Ellipsen (= Toroiden = bizirkuläre Kurven 8. Ordnung und 4. Klasse vom Geschlecht 1); die zur Führungsstange  $f$  parallelen Geraden hingegen umhüllen, wie bei jeder Konchoidenbewegung, wieder Kreise mit der Mitte  $O$ . Je zwei Geraden der Gangebene, die zu  $H$  symmetrisch liegen, umhüllen dieselbe Kurve.

b) *Führungshülse  $O$  außerhalb des Bahnkreises von  $H$  (Schwingende Kurbelschleife)*

Die Strahlen des Büschels  $H$  umhüllen ähnliche, monofokale Hyperbeln (Bild 7), die alle den Bahnkreis von  $H$  doppelt berühren und eine Drehstreckschar um den gemeinsamen Brennpunkt  $O$  bilden. Die übrigen Geraden der Gangebene besitzen daher i. a. Parallelkurven von Hyperbeln als Hüllbahnen. Die Hüllbahnen der zu  $f$  parallelen Geraden der Gangebene sind naturgemäß wieder Kreise.

c) *Führungshülse  $O$  auf dem Bahnkreis von  $H$  (Durchschlagende Kurbelschleife)*

Sämtliche Strahlen des Büschels  $H$  durchlaufen in der Rastebene Strahlbüschel, deren Träger auf dem Bahnkreis von  $H$  liegen (Bild 8). Alle anderen Geraden der Gangebene besitzen daher kreisförmige Hüllbahnen. Geschilderte Bewegung ist die Umkehr einer Ellipsenbewegung.

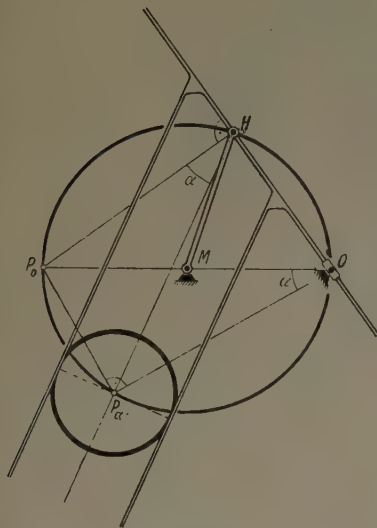


Bild 8

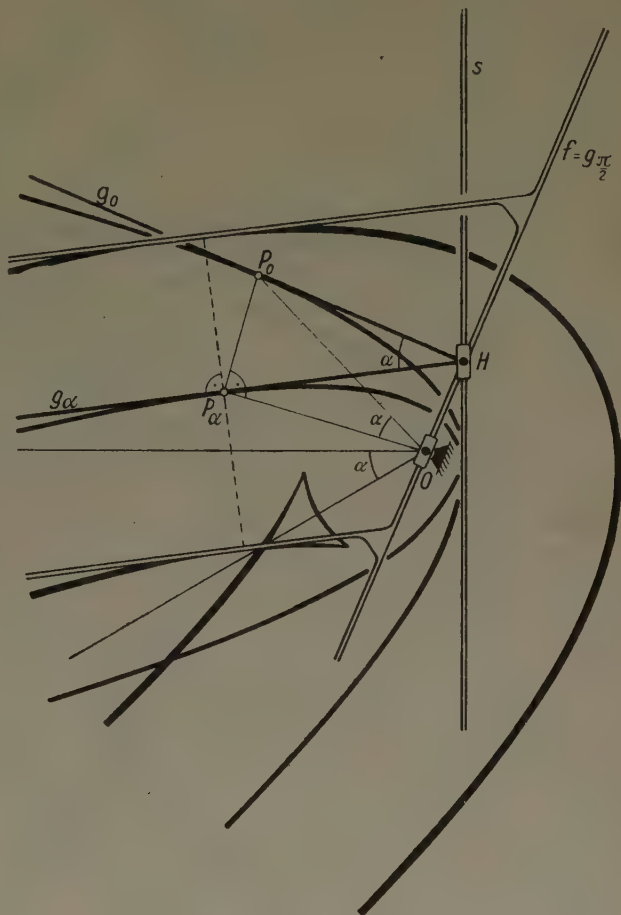


Bild 9

2. Beispiel: *Schleifschieber (Schubschleife)*

Durchläuft ein Punkt  $H$  der Führungsstange  $f$  (die durch eine in  $O$  drehbar gelagerte Hülse gleitet) eine Gerade  $s$  (= Führungsschiene), so umhüllen alle Geraden durch  $H$  (außer  $f$ ) ähnliche, monofokale Parabeln, die eine Drehstreckschar um den gemeinsamen Brennpunkt  $O$  bilden (Bild 9). Alle Parabeln der Schar haben die Gerade  $s$  zur gemeinsamen Tangente, sind somit Inkegelschnitte des Vierecks gebildet aus  $s$ , der Ferngeraden und den beiden Minimalgeraden durch  $O$ .

Bei einer Schleifschieberbewegung umhüllen die Geraden der Gangebene i. a. Parabeln oder deren Parallelkurven; die Geraden parallel zur Führungsstange umhüllen hingegen, wie bei jeder Konchoidenbewegung, Kreise.

3. Beispiel: *Symmetrischer Schleifschieber*

Es sei  $H$  ein Punkt der Führungsstange, die durch eine in  $O$  drehbar gelagerte Hülse gleitet, und  $g_0$  das Lot in  $H$  auf  $f$ , ferner  $A$  ein Punkt von  $g_0$  in der Entfernung  $a$  von  $H$ . Gleitet  $A$  auf einer Geraden  $s$  der Rastebene im Abstand  $a$  von  $O$ , so entsteht ein ebener Zwanglauf, der auch durch symmetrisches Abrollen zweier (kongruenter) Parabeln hervorgerufen werden kann (Bild 10). Die Führungsschiene  $s$  ist dabei die Leitgerade der Ratsparabel  $p_0$ ,  $O$  deren Brennpunkt und  $f$  die Leitgerade der Gangparabel  $p$ . Der beschriebene Mechanismus wird „Symmetrisches Schleifschiebergetriebe“ genannt. Die Bahn ( $H$ ) von  $H$  ist die Gegenpunktkurve der Ratsparabel  $p_0$  in bezug auf jenen Punkt  $L$  der Achse, durch den die Leitgerade von  $p_0$  geht, also



eine gerade Strophoide. Diese rationale zirkulare Kubik mit dem Doppelpunkt  $L$  besitzt eine Wendearsymptote parallel zu  $s$  in doppelter Entfernung wie  $L$  von  $O$ . Sie ist eine Kurve 4. Klasse und besitzt 3 Wendepunkte, von denen zwei konjugiert komplex sind, während der reelle Wendepunkt in den Fernpunkt von  $s$  fällt.

Bei der Bewegung des symmetrischen Schleifschiebers umhüllen daher die Geraden durch  $H$  ( $f$  ausgenommen) negative Fußpunktkurven von geraden Strophoiden in bezug auf ihren gemeinsamen Scheitel  $O$ , die eine Drehstreckschar um  $O$  bilden. Abgesehen von den  $f$ -parallelen Geraden, die wieder Kreise umhüllen, sind die Hüllbahnen der anderen Geraden der Gangebene Parallelkurven dieser negativen Fußpunktkurven von geraden Strophoiden.

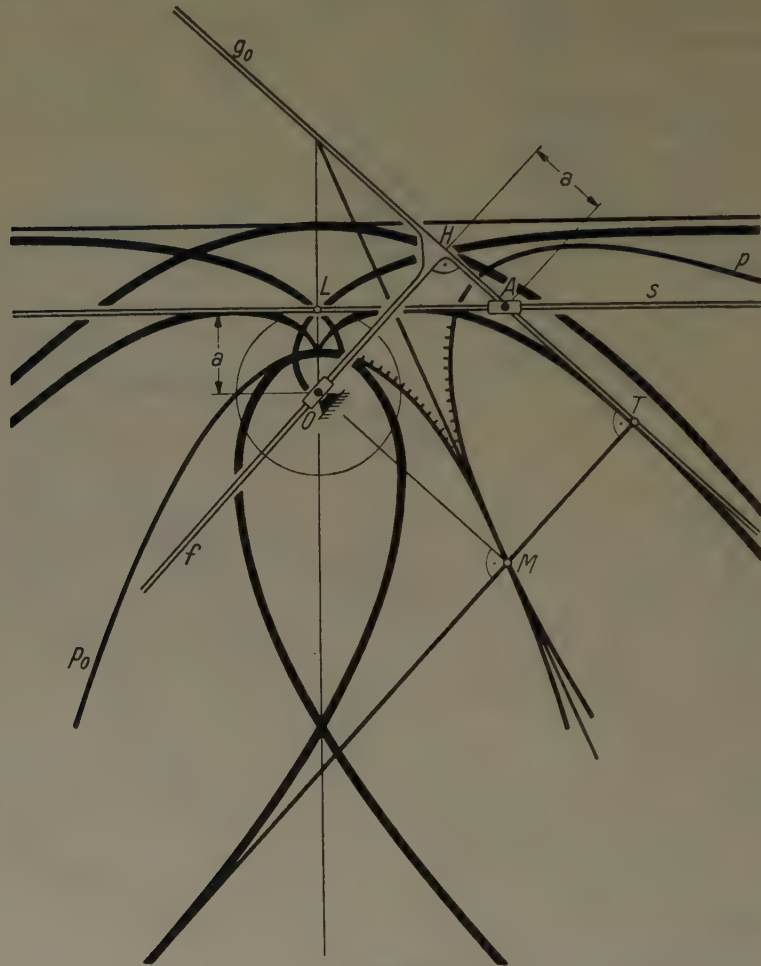


Bild 10

Da die gerade Strophoide anallagmatisch mit dem Inversionszentrum in ihrem Scheitel  $O$  ist (Inversionskreis trägt den Doppelpunkt  $L$ ), stimmt ihre negative Fußpunktkurve mit dem Aufpunkt  $O$  überein mit ihrer Polarkurve bezüglich eines Kreises um  $O$  durch  $L$ . Demnach ist die Hüllbahn ( $g_0$ ) eine rationale, zirkulare Kurve 4. Ordnung u. 3. Klasse mit einer Spitze im Parabelscheitel  $O$  und der Doppeltangente  $s$ . ( $g_0$ ) berührt auch die Ferngerade im Fernpunkt der Rastparabel und besitzt noch zwei weitere imaginäre Spitzen (dual zu den imaginären Wendepunkten der geraden Strophoide). Die Polarkurve des Scheitelkrümmungskreises der Strophoide ist eine asymptotische Parabel von ( $g_0$ ). Die asymptotische Parabel geht aus  $p_0$  durch eine Streckung 4:1 von  $O$  aus hervor.

Da der jeweilige Berührungspunkt  $M$  der beiden Parabeln  $p$ ,  $p_0$  stets der Momentanpol ist, ist das Viereck  $OHTM$  ein Rechteck, wobei  $T$  den Berührungspunkt von  $g_0$  mit ( $g_0$ ) bedeutet. Daher ist die Evolute der Hüllbahn ( $g_0$ ) die negative Fußpunktkurve der Rastparabel  $p_0$ , also eine TSCHIRNHAUSEN-Kubik. ( $g_0$ ) ist somit die symmetrische Evolvente einer TSCHIRNHAUSEN-Kubik. Somit gilt:

„Die bei einer symmetrischen Schleifschieberbewegung auftretenden Geradenhüllbahnen sind i. a. symmetrische Evolventen von TSCHIRNHAUSEN-Kubiken oder deren Parallelkurven; die  $f$ -parallelen Geraden hingegen umhüllen wie bei jeder Konchoidenbewegung Kreise.“

Abschließend sei noch auf einen anderen Zugang zu den Geradenhüllbahnen bei der Bewegung eines symmetrischen Schleifschiebers hingewiesen. Ist nämlich  $g$  eine Gerade der Gangebene bei irgendeiner symmetrischen Rollung [7], so ist das Spiegelbild von  $g$  bezüglich der jeweiligen Wälztangente eine feste Gerade  $g^*$  der Rastebene. Ein Kreis um das Momentanzentrum  $M$ , der  $g$  berührt, berührt demnach auch  $g^*$ . Somit ist die Hüllbahn ( $g$ ) von  $g$  auch als Rest der Hüllkurve der  $\infty^1$  Kreise zu erhalten, die  $g^*$  berühren und deren Mitten auf der Rastpolkurve liegen.

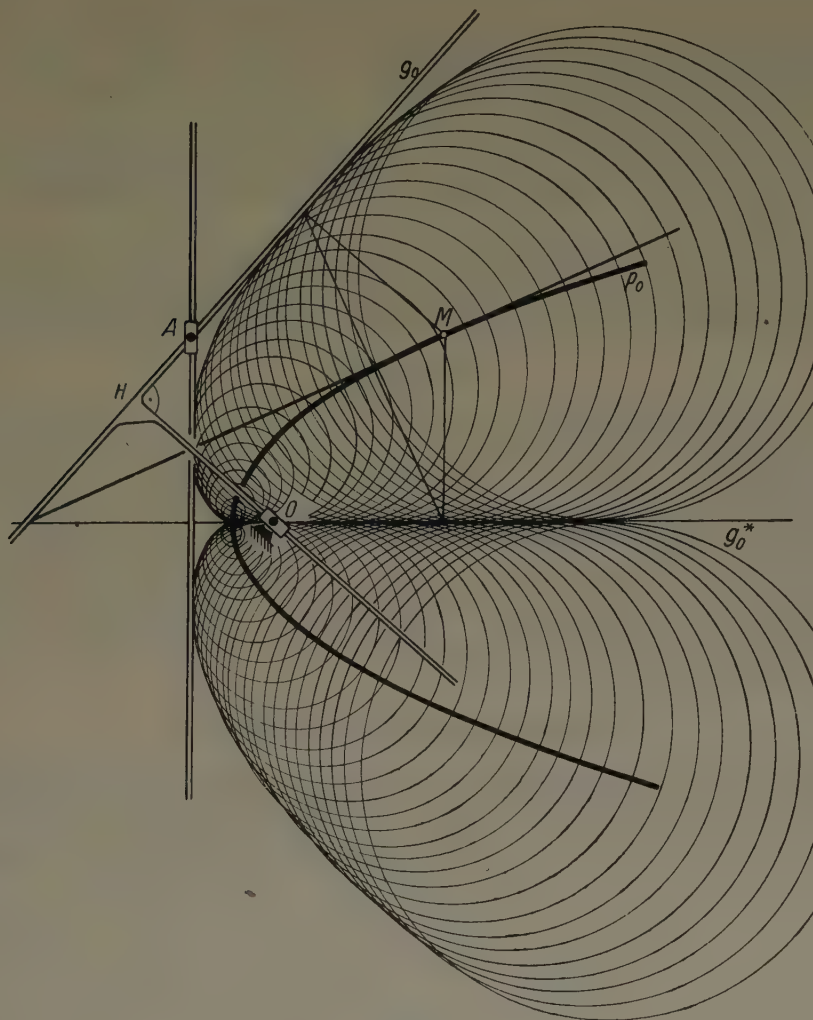


Bild 11

Bild 11 zeigt, wie die Hüllbahn von  $g_0 = [HA] =$  Achse der Gangparabel auf diese Art gefunden werden kann.

Dieser kurzen Note soll eine weitere folgen, die die rechnerische Erfassung der Geradenhüllbahnen bei Konchoidenbewegungen schildert.

### Literatur

- [1] L. TUSCHEL, Über die Schraubliniengeometrie und deren konstruktive Verwendung. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **120** (1911), S. 233—259.
- [2] E. MÜLLER, Über Punkttransformationen, die die Ebenen des Raumes in kongruente gerade Konoide mit parallelen Achsen überführen. Sitzb. Akad. Wiss. Wien **126** (1917), S. 915—929.
- [3] E. KRUPPA, Über die Mises'sche Abbildung räumlicher Kräftesysteme. ZAMM **4** (1924), S. 146—155.
- [4] R. BEREIS u. H. BRAUNER, Schraubung und Netzprojektion. Elemente Math. **12** (1957), S. 33—40.
- [5] R. BEREIS u. H. BRAUNER, Beiträge zur Theorie des mit einer euklidischen Schraubung verknüpften Nullsystems. Math. Nachr. (1960), S. 1—17.
- [6] H. BRAUNER, Über die durch einen quadratischen Komplex der Charakteristik (11) (112) vermittelten Projektion I. Mh. Math. **62** (1958), S. 119—131.
- [7] R. BEREIS, Über die symmetrische Rollung. Österr. Ing. Archiv VII (1953), S. 243—246.

Manuskripteingang: 12. 2. 60

Anschrift: Prof. Dr. techn. habil. R. BEREIS, Dresden A 27, Schnorrstr. 76



# Schiffswellen als Beispiel für die Wellenausbreitung in anisotropen, dispergierenden Medien<sup>\*)</sup>

Von E. BECKER

*Die Geometrie der Wellenbilder, die man z. B. auf der freien Oberfläche eines Stromes schwerer Flüssigkeit bei punktförmiger, harmonischer Störung beobachten kann, werden durch Zurückführung auf allgemeine Gesetzmäßigkeiten der Wellenausbreitung in anisotropen, dispergierenden Medien erklärt. Hierbei wird an Begriffsbildungen angeknüpft, wie sie in ähnlicher Form u. a. aus der Optik anisotroper Medien bekannt sind.*

*The geometry of wave phenomena such as observed on the surface of flowing heavy liquid in case of a sharply localised harmonic disturbance is explained in terms of the general laws of wave propagation in anisotropic dispersive media. Conceptions similar to those used in the optics of anisotropic media are introduced in the discussion.*

Геометрия волновых образований, получающихся например на поверхности потока тяжелой жидкости, объясняется, сводя вопрос к общим закономерностям распространения волн в анизотропных, вызывающих дисперсию средах. При этом примыкается к понятиям, известным в подобном виде например из оптики анизотропных сред.

## 1. Einleitung

Wenn man die freie Oberfläche eines unendlich ausgedehnten, mit konstanter Geschwindigkeit über horizontalem Boden fließenden Stromes schwerer Flüssigkeit durch eine harmonisch pulsierende, punktförmige Störung zu Schwingungen anregt, so entsteht ein ziemlich kompliziertes Wellenbild auf der Oberfläche dieses Stromes [2], [3], [8]. Das von einem nicht pulsierenden Störpunkt verursachte Wellenbild ist als der Grenzfall, daß die Pulsationsfrequenz der Störung gegen 0 geht, in diesen Wellenbildern enthalten [1], [5]. Im allgemeinen spricht man in diesem Grenzfall von „Schiffswellen“ (vgl. aber die Definition in [2]). Die folgenden Überlegungen haben eine einfache Deutung der Wellenbilder der pulsierenden Störung zum Inhalt, die an Begriffsbildungen anknüpft, wie sie in ähnlicher Weise in der Optik anisotroper Medien (Kristalloptik) üblich sind [4], [7]<sup>1)</sup>.

## 2. Begriff der Gruppengeschwindigkeit

Wir betrachten einen  $n$ -dimensionalen Raum, in dem eine skalare Größe<sup>2)</sup>  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  definiert sei.  $\psi$  soll gewissen Gleichungen genügen, von denen wir voraussetzen, daß sie linear sind und daß sie Lösungen in Form ebener Wellen in dem Raum der Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , den wir auch als „ $\psi$ -Raum“ bezeichnen wollen, haben. D. h.  $\psi$  kann in der Form

$$\psi = e^{i(\tau - \omega(t) \cdot t)} \dots \dots \dots (1)$$

gegeben sein.  $t$  ist der Wellenzahlvektor mit den Komponenten  $k_1, k_2, \dots, k_n$  und  $\tau$  der Ortsvektor im  $\psi$ -Raum mit den Komponenten  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; die skalare Größe  $\omega(t) \geq 0$  ist die Kreisfrequenz und  $t$  die Zeit. Die Kreisfrequenz hänge in vorgegebener Weise vom Wellenzahlvektor  $t$  ab; diese Abhängigkeit wird als „Dispersionsgesetz“ der „ $\psi$ -Wellen“ bezeichnet.

Die Phasengeschwindigkeit  $v$  der Welle (1) ist offenbar durch

$$v = \frac{t}{|t|^2} \omega(t) \dots \dots \dots (2)$$

gegeben, denn dies ist nach (1) die Geschwindigkeit, mit der sich Punkte gleicher Phase im  $\psi$ -Raum bewegen.

Wegen der vorausgesetzten Linearität lassen sich die Wellen linear superponieren. Durch Überlagerung zweier Wellen mit nahe benachbarten Wellenzahlvektoren  $t$  erhält man dann auf einfache Weise einen Ausdruck für die „Gruppengeschwindigkeit“ u. Wir wählen hierzu zwei Wellen mit den Wellenzahlvektoren  $t + dt$  und  $t - dt$  mit beliebigem, infinitesimalem  $dt$ , d. h. den Kreisfrequenzen  $\omega + d\omega$  und  $\omega - d\omega$ , wobei

$$d\omega = \text{grad } \omega \cdot dt \dots \dots \dots (3)$$

<sup>\*)</sup> Diese Untersuchung wurde durch das Wirtschaftsministerium des Landes Baden-Württemberg gefördert.

<sup>1)</sup> Man vgl. auch eine nach Drucklegung dieser Mitteilung erschienene Arbeit von M. J. LIDTHILL, Studies on magnetohydrodynamic waves and other anisotropic wave motions, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 252, pp. 397–430, (31. 3. 1960).

<sup>2)</sup> In der Kristalloptik hat man es im Gegensatz hierzu mit vektoriellen Größen  $\psi$  zu tun.

ist. Der Gradient ist im „Wellenzahlraum“ zu bilden, also  $\text{grad } \omega = \{\partial \omega / \partial k_1, \partial \omega / \partial k_2, \dots, \partial \omega / \partial k_n\}$ . Man erhält nunmehr als Überlagerung der beiden Wellen:

$$\begin{aligned} \psi &= e^{i[(\mathfrak{k} + d\mathfrak{k})\mathfrak{r} - (\omega + d\omega)t]} + e^{i[(\mathfrak{k} - d\mathfrak{k})\mathfrak{r} - (\omega - d\omega)t]} \\ &= 2 e^{i(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t)} \cos [d\mathfrak{k}(\mathfrak{r} - \text{grad } \omega \cdot \mathfrak{t})] \end{aligned} \quad (4).$$

Es ergibt sich also wieder eine ebene Welle, deren Amplitude aber jetzt mit dem Faktor  $\cos [d\mathfrak{k}(\mathfrak{r} - \text{grad } \omega \cdot \mathfrak{t})]$  moduliert ist. Diese Modulation pflanzt sich mit der Gruppengeschwindigkeit  $u$  im  $\psi$ -Raum fort, wobei nach (4) offenbar

$$u = \text{grad } \omega \quad (5)$$

ist. Der Ausdruck (5) ist die natürliche Verallgemeinerung des für isotrope Medien gültigen Ausdrucks für die Gruppengeschwindigkeit. In der Optik ist für  $u$  auch die Bezeichnung „Strahlgeschwindigkeit“ üblich.

In einem isotropen Medium ist  $\omega(\mathfrak{t}) = \omega(|\mathfrak{t}|)$  und somit

$$u = \text{grad } \omega = \frac{\mathfrak{t}}{|\mathfrak{t}|} \frac{\partial \omega}{\partial |\mathfrak{t}|} \quad (6).$$

Der Vektor der Gruppengeschwindigkeit ist also hier dem Wellenzahlvektor und damit dem Phasengeschwindigkeitsvektor gleichgerichtet und hat den Betrag

$$|u| = \frac{\partial \omega}{\partial |\mathfrak{t}|} \quad (7).$$

Von gewissem Interesse ist außerdem noch der Fall, daß die in die Richtung von  $\mathfrak{t}$  fallende Komponente  $u_p$  der Gruppengeschwindigkeit, d. h. also

$$u_p = \frac{\mathfrak{t}}{|\mathfrak{t}|} \cdot \text{grad } \omega \quad (8),$$

mit der Phasengeschwindigkeit übereinstimmt, d. h. daß die Beziehung

$$\frac{\mathfrak{t}}{|\mathfrak{t}|} \cdot \text{grad } \omega = \frac{\omega(\mathfrak{t})}{|\mathfrak{t}|} \quad (9)$$

besteht, oder:

$$\omega(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t} \cdot \text{grad } \omega \quad (10).$$

Nach Gl. (10) muß in diesem Fall  $\omega(\mathfrak{t})$  eine homogene Funktion 1. Grades von  $\mathfrak{t}$  sein, d. h.:

$$\omega(\sigma \mathfrak{t}) = \sigma \omega(\mathfrak{t}) \quad (11).$$

Dieser Fall ist in der Kristalloptik u. a. dann gegeben, wenn man die dielektrischen Konstanten des Kristalls als unabhängig von der Frequenz  $\omega$  betrachten kann [4], [6].

3. Frequenzfläche und Phasenfläche

Wir denken uns im Wellenzahlraum die Flächen  $\omega(\mathfrak{t}) = \text{const.}$  konstruiert (Bild 1). Bei vorgegebener Frequenz  $\omega_0$  sind im  $\psi$ -Raum sämtliche ebenen Wellen möglich, deren Wellenzahlvektoren im Wellenzahlraum auf der „Frequenzfläche“  $\omega(\mathfrak{t}) = \omega_0$  enden („Frequenzbedingung“ [2]<sup>3)</sup>. Für eine bestimmte Welle mit dem Wellenzahlvektor  $\mathfrak{t} = \overrightarrow{OA}$  ist hierbei die Richtung der Gruppengeschwindigkeit durch die Richtung des Vektors  $\overrightarrow{OB}$  gegeben, der senkrecht auf der Tangentialebene in A an die Frequenzfläche steht (Bild 1), denn in diesem Fall stimmt die Richtung von  $\overrightarrow{OB}$  mit derjenigen des Gradienten von  $\omega$  in A überein. Der Fall, daß die Richtung von  $\text{grad } \omega$  derjenigen von  $\overrightarrow{OB}$  gerade entgegengesetzt ist, soll zunächst ausgeschlossen werden.

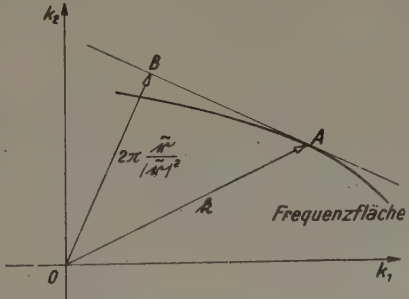


Bild 1. Wellenzahlraum mit Frequenzfläche  $\omega = \text{const}$

Weiterhin denken wir uns die zum Wellenzahlvektor  $\mathfrak{t} = \overrightarrow{OA}$  gehörige Welle im  $\psi$ -Raum durch zwei aufeinanderfolgende Ebenen konstanter Phase  $E$  und  $E'$  im Phasenabstand  $2 \pi$ , also z. B. durch zwei aufeinanderfolgende „Wellenberge“, repräsentiert. Die Ebene  $E$  soll hierbei durch den Nullpunkt  $O^*$  des Koordinatensystems gehen (Bild 2). Der senkrechte Abstand der Ebene  $E'$  vom

<sup>3)</sup> Diese „Frequenzflächen“ entsprechen etwa den „Normalenflächen“ in der Optik (vgl. [4], [7]).



Nullpunkt ist durch den Vektor  $\vec{OA}^* = 2\pi \vec{t}/|\vec{t}|^2$  gegeben, mit  $|\vec{OA}^*| = \lambda$ , wobei  $\lambda = 2\pi/|\vec{t}|$  die Wellenlänge bedeutet. Der Vektor von  $O^*$  bis zur Ebene  $E'$  in Richtung der Gruppengeschwindigkeit, d. h. in Richtung des Vektors  $\vec{OB}$ , sei  $\vec{O}^*B^* = \vec{\tilde{t}}$ .

Nun sieht man leicht folgendes ein:

Da der Vektor  $\vec{OB}$  im Wellenzahlraum dieselbe Richtung wie  $\vec{\tilde{t}}$  im  $\psi$ -Raum hat, ist sein Betrag durch

$$|\vec{OB}| = \vec{t} \cdot \frac{\vec{\tilde{t}}}{|\vec{\tilde{t}}|} = \frac{2\pi}{|\vec{\tilde{t}}|} \quad (12)$$

gegeben, wobei die letzte Gleichung deshalb gilt, weil die Ebenen  $E$  und  $E'$  im Phasenabstand  $2\pi$  aufeinanderfolgen. Also kann man jetzt schreiben:

$$\vec{OB} = 2\pi \frac{\vec{\tilde{t}}}{|\vec{\tilde{t}}|^2} \quad (13)$$

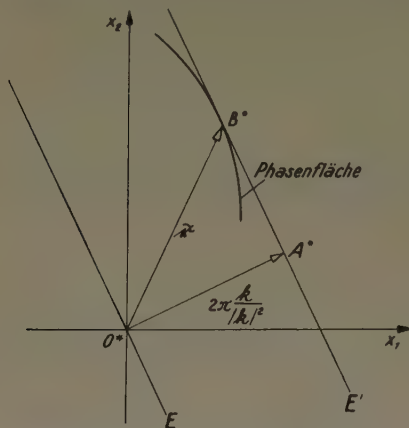


Bild 2.  $\psi$ -Raum mit Phasenfläche

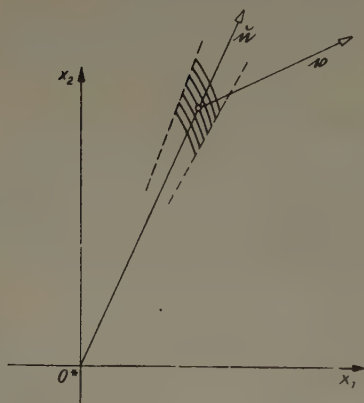


Bild 3. Radiale Ausbreitung der Wellenruppen vom Störzentrum  $O^*$   
 $u$  = Gruppengeschwindigkeit,  
 $v$  = Phasengeschwindigkeit im Aufpunkt

Denkt man sich nun für alle auf der Frequenzfläche  $\omega = \omega_0$  endenden Vektoren  $\vec{t}$  die Ebenen  $E'$  im  $\psi$ -Raum konstruiert, so hüllen diese Ebenen im allgemeinen eine Fläche ein, die mit „Phasenfläche“ (Bild 2) bezeichnet wird<sup>4)</sup>. Der Berührungspunkt der Phasenfläche mit der Ebene  $E'$  ist der Punkt  $B^*$ . Dies ergibt sich folgendermaßen: Wegen der Enveloppeneigenschaft der Phasenfläche muß dieser Berührungspunkt auf den Schnitten je zweier infinitesimal benachbarter Ebenen  $E'$  liegen, die sich im Wellenzahlvektor um  $d\vec{t}$  unterscheiden, wobei die Richtung des infinitesimalen Vektors  $d\vec{t}$  nur durch die Forderung eingeschränkt ist, daß  $d\vec{t}$  in der Frequenzfläche liegt. Bezeichnen wir für den Augenblick den Ortsvektor des in Frage stehenden Berührungspunktes mit  $\vec{\tilde{t}}$ , so gilt demnach  $\vec{t} \cdot \vec{\tilde{t}} = 2\pi$  zusammen mit  $(\vec{t} + d\vec{t}) \cdot \vec{\tilde{t}} = 2\pi$ , oder:  $d\vec{t} \cdot \vec{\tilde{t}} = 0$ .  $\vec{\tilde{t}}$  steht also senkrecht auf allen in der Frequenzfläche liegenden  $d\vec{t}$  und ist somit parallel zum Vektor der Gruppengeschwindigkeit. Da dies oben aber für  $\vec{\tilde{t}}$  vorausgesetzt war, gilt  $\vec{\tilde{t}} = \vec{t}$ .

Man erkennt, daß eine duale Beziehung zwischen Frequenzfläche und Phasenfläche besteht, deren Charakter aus den Bildern 1 und 2 deutlich wird. Auf Grund dieser Beziehung kann die eine Fläche immer konstruiert werden, wenn die andere vorgegeben ist. In den meisten Fällen, z. B. bei Schiffswellen (Abschnitt 5) besteht das Problem darin, zu vorgegebener Frequenzfläche die Phasenfläche zu finden.

Es bleibt noch der oben ausgeschlossene Fall, daß die Richtung von  $\text{grad } \omega$  derjenigen von  $\vec{OB}$  entgegengesetzt ist. In diesem Fall sind unsere Überlegungen weiterhin gültig, wenn wir in Bild 1 den Vektor  $\vec{OB}$  mit  $-2\pi \vec{t}/|\vec{t}|^2$  und in Bild 2 den Vektor  $\vec{O}^*A^*$  mit  $-2\pi \vec{t}/|\vec{t}|^2$  identifizieren. Die Ebene  $E'$  muß dann links von  $E$  liegen.

#### 4. Wellenbild einer punktförmigen Störung

Im Nullpunkt des  $\psi$ -Raumes sei eine punktförmige, harmonisch mit der Kreisfrequenz  $\omega_0$  pulsierende „Störung“ gegeben, die im ganzen Raum harmonische Schwingungen der Größe  $\psi$  verursacht. Falls man als Randbedingung im Unendlichen eine Ausstrahlungsbedingung stellt, werden diese Schwingungen die Form von Wellen haben, die von der Störquelle fortlaufen. Gesucht seien nun die Flächen konstanter Phase mit dem Phasenabstand  $2\pi$  in diesem Wellenfeld, also z. B. die „Wellenberge“. Diese Flächen konstanter Phase sind für genügend große Abstände vom Störpunkt verhältnismäßig einfach zu finden, wenn man voraussetzt, daß sie in weiter Entfernung vom Störpunkt ähnlich werden und daß in dem betrachteten Raumteil keine unendlich großen Wellenlängen auftreten. In diesem Fall entstehen nämlich die Flächen konstanter Phase aus der in Abschnitt 3 definierten Phasenfläche, indem man diese in allen Raumrichtungen linear mit den Faktoren  $N, N+1, N+2$  usw. ähnlich vergrößert. Wenn  $N$

<sup>4)</sup> Unsere Definition der „Phasenfläche“ ist verwandt mit der Definition der „Strahlenfläche“ in der Optik, vgl. [4], [7].

genügend groß ist, kann man wegen der vorausgesetzten Endlichkeit der Wellenlängen die so entstehenden Flächen in einem herausgegriffenen, begrenzten Raumteil als hinreichend eben betrachten (Bild 3). Man hat somit in jedem Raumteil annähernd ebene Wellen, die der „Frequenzbedingung“  $\omega = \omega_0$  genügen (Bild 3). Bemerkenswert ist hierbei, daß in jedem Punkt des Raumes gerade diejenigen mit der Frequenzbedingung  $\omega = \omega_0$  verträglichen Wellen auftreten, deren Gruppengeschwindigkeitsvektor die Richtung vom Ort der anregenden Störung zu dem betreffenden Raumpunkt hat, (nämlich die Richtung von  $\overrightarrow{OB}$ ). Physikalisch bedeutet dies radiale Ausstrahlung der Wellengruppen [2], wie dies in Bild 3 skizziert ist.

5. Schiffswellen

Bei der Anwendung auf Wellen an der ebenen, im Ruhestand horizontalen freien Oberfläche einer schweren Flüssigkeit hat man zwei Raumdimensionen ( $n = 2$ ). Die Größe  $\psi$  kann hier z. B. mit der Auslenkung der Flüssigkeitsoberfläche aus der horizontalen Ruhelage identifiziert werden. Im einfachsten Fall der Wellen auf einer ruhenden Flüssigkeit ist außerdem dieser Raum isotrop, d. h. das Dispersionsgesetz der Wellen ist von der Form  $\omega(\mathfrak{f}) = \overline{\omega}(|\mathfrak{f}|)$ , wobei der Querstrich von jetzt ab die Isotropie kennzeichnen soll. Nehmen wir aber an, die Flüssigkeit bewege sich parallel zur freien Oberfläche mit konstanter Geschwindigkeit  $c$ , so entsteht eine Anisotropie für die Wellenausbreitung. Die Wellengeschwindigkeit gegen den Strom ist bei gleichbleibender Frequenz jetzt kleiner als die mit dem Strom. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, die Flüssigkeit bewege sich mit der Geschwindigkeit  $c$  in negativer  $x_1$ -Richtung. Dann hat man anstelle des isotropen Dispersionsgesetzes offenbar:

$$\omega(\mathfrak{f}) = |\overline{\omega}(|\mathfrak{f}|) - c k_1| \dots \dots \dots (14).$$

Dies wird klar, wenn man mit  $|\mathfrak{f}| \neq 0$  (Ausschluß unendlicher Wellenlänge) Gl. (14) durch  $|\mathfrak{f}|$  dividiert und  $k_1/|\mathfrak{f}| = \cos \Theta$  setzt. Man erhält dann:

$$V(\mathfrak{f}) = |\overline{V}(|\mathfrak{f}|) - c \cdot \cos \Theta| \dots \dots \dots (15),$$

wobei  $V = |\mathfrak{v}|$  der Betrag der Phasengeschwindigkeit ist. Beziehung (15) ist nun unmittelbar aus Bild 4 verständlich, wenn man bedenkt, daß die relativ zur Flüssigkeit mit der Phasengeschwindigkeit  $\overline{V}$  unter dem Winkel  $\Theta$  bewegten Wellen relativ zum ruhenden Raum durch die Bewegung der Flüssigkeit mit einer Geschwindigkeit  $c \cdot \cos \Theta$  konvektiv zurückversetzt werden und somit die durch (15) gegebene Phasengeschwindigkeit haben [2].

Bei Wellen auf unendlich tiefer Flüssigkeit mit vernachlässigter Oberflächenspannung ist

$$\overline{\omega}(|\mathfrak{f}|) = g^{1/2} |\mathfrak{f}|^{1/2} \dots \dots \dots (16)$$

mit  $g$  = Schwerebeschleunigung. Im Folgenden wollen wir zunächst ein etwas allgemeineres Dispersionsgesetz betrachten, nämlich:

$$\overline{\omega}(|\mathfrak{f}|) = G \cdot |\mathfrak{f}|^m \dots \dots \dots (17),$$

mit  $0 < m < 1$  und konstantem  $G > 0$ . Andererseits wollen wir uns auf den Fall einer stationären Störung beschränken, d. h. die Pulsationsfrequenz der Störung  $\omega_0 = 0$  setzen. Die Frequenzfläche  $\omega = \omega_0 = 0$  ist in unserem Fall eine „Frequenzkurve“ in der Wellenzahlebene, die durch

$$G |\mathfrak{f}|^m - c k_1 = 0 \dots \dots \dots (18)$$

gegeben ist, d. h. durch

$$|\mathfrak{f}| = \left( \frac{c}{G} \cos \Theta \right)^{\frac{1}{m-1}} \dots \dots \dots (19),$$

mit der oben eingeführten und aus Bild 4 und 5 ersichtlichen Bedeutung von  $\Theta$ . Die Frequenzkurve ist nach (19) von der in Bild 5 skizzierten, zur  $k_1$ -Achse symmetrischen Form. (Die singuläre Lösung  $|\mathfrak{f}| = 0$  der Gleichung (18) bleibt zunächst außer Betracht; sie wird weiter unten im Zusammenhang mit  $\omega_0 \neq 0$  erörtert). Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die aus (14) zu bildenden Vektoren  $\text{grad } \omega$  auf der Frequenzkurve  $\omega = 0$  nach links gerichtet sind, wie in Bild 5 angedeutet.

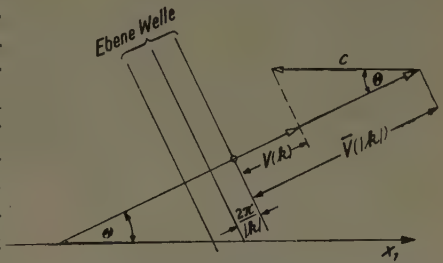


Bild 4. Erläuterung zu Gleichung (15).  $\overline{V}$  ist die Phasengeschwindigkeit relativ zur Flüssigkeit,  $c$  die Bewegungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit,  $V$  die wirkliche Phasengeschwindigkeit

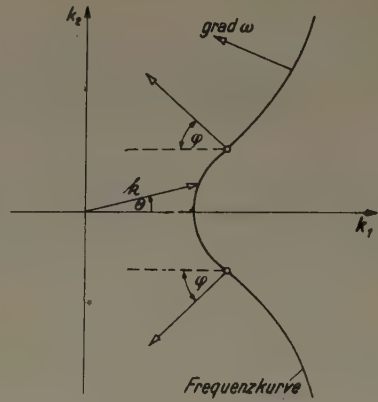


Bild 5. Frequenzkurve  $\omega = 0$  für das Dispersionsgesetz  $\omega(\mathfrak{f}) = G |\mathfrak{f}|^m - c k_1$  ( $0 < m < 1$ )



Aus Gleichung (19) ersieht man, daß die Größe  $c/G$  nur ein Maßstabsfaktor für die Frequenzkurve ist, daß also die Frequenzkurven für verschiedene Geschwindigkeiten  $c$  durch ähnliche Vergrößerung oder Verkleinerung ineinander übergehen. Entsprechendes gilt dann aber auch für die Phasenkurven (die im Zweidimensionalen an die Stelle von Phasenflächen treten), die zu verschiedenen  $c$ -Werten gehören.

Weiter entnimmt man aus Bild 5 eine wichtige Eigenschaft des Wellenfeldes: offenbar kommen nicht alle Richtungen von  $\text{grad } \omega$  vor, sondern nur solche, die mit der negativen  $k_1$ -Achse einen Winkel bilden, der innerhalb der Grenzen  $\pm \varphi$  liegt, wo  $\varphi$  durch die beiden Wendepunkte der Frequenzkurve bestimmt ist (Bild 5). In der  $\varphi$ -Ebene (d. h. z. B. auf der Flüssigkeitsoberfläche) ist das Wellenbild durch denselben Winkel  $\varphi$  begrenzt (Bild 6), es kommen nur Ausstrahlungsrichtungen vor, die innerhalb des durch  $\varphi$  gegebenen Winkelraumes liegen. Dieser Winkel  $\varphi$  ist zudem nach dem oben Gesagten unabhängig von der Geschwindigkeit  $c$ , er hängt nur von dem Exponenten  $m$  des Dispersionsgesetzes (17) ab; nach elementarer Rechnung ergibt sich nämlich aus (19):

$$\varphi = \arctg \left( \frac{m}{2\sqrt{1-m}} \right) \quad (20).$$

In dem besonders wichtigen Fall der Wellen auf einer unendlich tiefen Flüssigkeit ist nach Gl. (16)  $m = 1/2$  und man erhält aus (20):

$$\varphi = 19^\circ 28'.$$

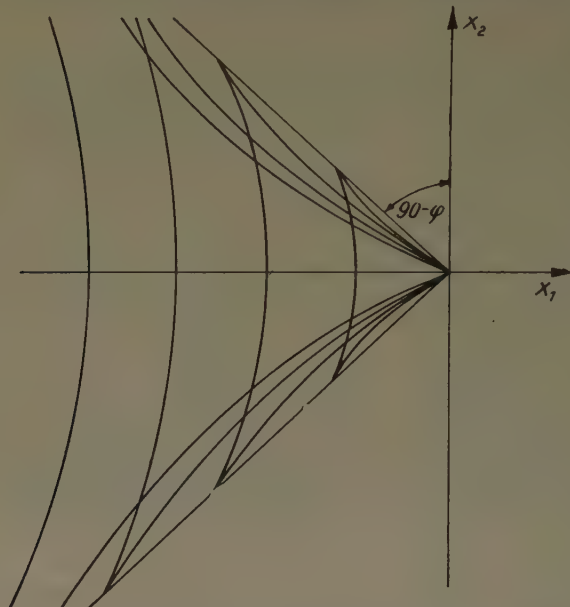


Bild 6. Die zur Frequenzkurve von Bild 5 gehörenden Kurven konstanter Phase (Phasenabstand  $2\pi$ ). Die kleinste hiervon ist die „Phasenkurve“

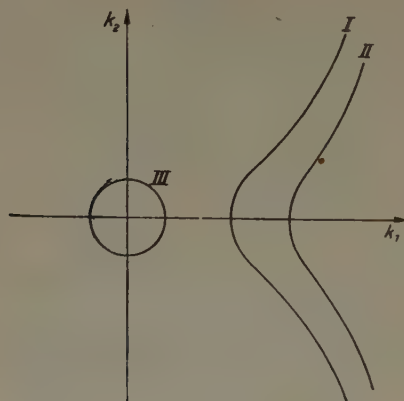


Bild 7. Frequenzkurve  $\omega = \omega_0 + 0$  für das Dispersionsgesetz  $\omega(t) = G|t|^m - c k_1$  ( $0 < m < 1$ )

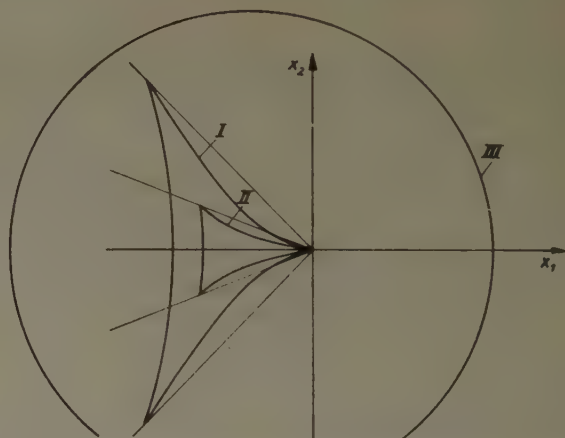


Bild 8. Die zu den verschiedenen Zweigen der Frequenzkurve in Bild 7 gehörenden Zweige der Phasenkurve

Dies ist ein lange bekanntes und auf verschiedene Weisen bestätigtes Ergebnis aus der Theorie der Schiffswellen [5], [6]. Die aus Bild 5 leicht zu konstruierende Phasenkurve ist in Bild 9 dargestellt, zusammen mit ähnlichen Vergrößerungen dieser Phasenkurve, die als Kurven konstanter Phase (Abschnitt 3) ein anschauliches Bild des Wellenfeldes ergeben. (vgl. auch [1], [2], [3], [5], [6]).

Abschließend noch einige Bemerkungen zu den Wellenbildern für das Dispersionsgesetz (16) mit  $\omega_0 \neq 0$ : Zunächst sei festgestellt, daß man für alle  $\omega_0 > 0$  die Frequenzkurven  $\bar{\omega} = \omega_0$  in der  $k_1, k_2$ -Ebene sehr einfach konstruieren kann, indem man in dieser Ebene die Kreise  $\bar{\omega} = \text{const.}$  und die geraden Linien  $-c k_1 = \text{const.}$  einzeichnet und dann jeweils diejenigen Schnittpunkte von Kreisen und Geraden verbindet, die einem vorgegebenen Wert von  $\bar{\omega} - c k_1$  entsprechen. Auf diese Weise findet man, daß für hinreichend kleine Werte von  $\omega_0$  (was „hinreichend“ hier bedeutet, wird in [2] geklärt) die Frequenzkurve von Bild 5 in die beiden Äste I und II aufspaltet (Bild 7) und daß gleichzeitig die für  $\omega_0 = 0$  singuläre Lösung  $|t| = 0$  von (18) zu einer

um den Nullpunkt geschlossenen Kurve III wird. Den Ästen I und II entsprechen Phasenkurven, die sich nicht wesentlich von der Phasenkurve der Schiffswellen in Bild 6 unterscheiden (Bild 8), dem Ast III entspricht eine geschlossene Phasenkurve (Bild 8). Hinsichtlich weiterer Einzelheiten vergleiche man [2], wo die Phasenkurven auch für große  $\omega_0$  diskutiert werden.

## 6. Zusammenfassung

In der vorliegenden Mitteilung werden die Wellenbilder, die man z. B. auf der freien Oberfläche eines Stromes schwerer Flüssigkeit bei punktförmiger, harmonischer Störung dieser Oberfläche beobachten kann, durch Zurückführung auf allgemeine Gesetzmäßigkeiten der Wellenausbreitung in anisotropen, dispergierenden Medien erklärt. Außer dem Raum, in dem sich die Wellenausbreitung abspielt, wird ein Wellenzahlraum eingeführt, der von den Wellenzahlvektoren aufgespannt wird. Die Gruppengeschwindigkeit einer Welle ergibt sich als grad  $\omega$  in diesem Raum, wobei  $\omega(\mathbf{k})$  die vom Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}$  in vorgegebener Weise abhängige Kreisfrequenz der Welle ist. Jeder „Frequenzfläche“  $\omega = \omega_0 = \text{const}$  im Wellenzahlraum ist eine „Phasenfläche“ in dem Raum zugeordnet, in dem sich die Wellen ausbreiten. Die Art dieser Zuordnung ist aus Bild 1 und Bild 2 ersichtlich. Die Kurven konstanter Phase des Wellenfeldes sind dann, in weiter Entfernung von dem harmonisch schwingenden Störpunkt, ähnliche Vergrößerungen dieser Phasenfläche. Insbesondere folgt, daß in jedem Punkt des Raumes gerade solche Wellenlängen und Fortpflanzungsrichtungen der Wellen auftreten, für die der zugehörige Vektor der in Abschnitt 2 definierten Gruppengeschwindigkeit radial vom Störzentrum fortgerichtet ist.

Im Abschnitt 5 werden diese Überlegungen auf die Wellen an der Oberfläche eines Flüssigkeitsstromes angewandt. Die Anisotropie der Wellenausbreitung kommt hier durch die Bewegung der Flüssigkeit in einer bestimmten Richtung zustande. Es wird gezeigt, daß sich auf einfache Weise wichtige Eigenschaften der sog. „Schiffswellen“ erklären lassen.

## Literatur

- [1] E. BECKER, Verformung einer Wasseroberfläche durch eine punktförmige Störung. Forschungshefte für Schiffstechnik, 2 (1955), S. 178—188.
- [2] E. BECKER, Das Wellenbild einer unter der Oberfläche eines Stromes schwerer Flüssigkeit pulsierenden Quelle, ZAMM 38 (1958), S. 391—399.
- [3] K. EGGERS, Über das Wellenbild einer pulsierenden Störung in Translation, „Schiff und Hafen“ 9 (1957).
- [4] G. JOOS, Lehrbuch der theoretischen Physik, 3. Buch, Kap. 3, 6. Auflage, Leipzig 1945.
- [5] H. LAMB, Hydrodynamics, 6th ed., chapt. IX. Cambridge 1953.
- [6] A. SOMMERFELD, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. II, Kap. 5, 2. Auflage, Leipzig 1949.
- [7] A. SOMMERFELD, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. IV, Kap. 4, 1. Auflage, Wiesbaden 1950.
- [8] L. N. SRETENSKY, Die Bewegung eines Vibrators unter der Oberfläche einer Flüssigkeit (in Russ.), Trudi Moskov. Nat. Obsc. 3 (1954), S. 3—14.

Manuskripteingang: 11. 3. 1960

Anschrift: Dr. ERNST BECKER, Freiburg i. Br., Ettenheimerstr. 2

ZAMM 41 (1961) Heft 1/2, Seite 31—43

# Die dünne, freiaufgelagerte Kreisringplatte mit Einzellast

Von К.Н. НАСИТТА

*Es wird das Problem der außen freiaufgelagerten und innen freien Kreisringplatte mit einer Einzellast an beliebiger Stelle gelöst. Die Lösung setzt sich aus einem singulären und einem regulären Teil zusammen, wobei zur Erzeugung der Einzellast-Singularität eine schon bekannte Funktion benutzt werden kann. Für diese Funktion ergibt sich mit Hilfe von Integralformeln der Greenschen Funktion eine Fourierreiheentwicklung. Auf Grund dieser Entwicklung des singulären Teiles ist es unter Ausnutzung der Randbedingungen möglich, den regulären Teil zu konstruieren.*

*The problem of an annular plate supported at the external circumference and loaded at a single arbitrary point is being solved. The solution consists of a regular and a singular component, the load singularity being expressible by a function already known. For this function a Fourier series is obtained by using the integral representation of the Green function. In this way it becomes possible, by using the boundary conditions, to construct also the regular component of the solution.*

В настоящей работе решается задача о кольцообразной круговой пластинке, свободно наложенной вдоль внешнего края и свободной вдоль внутреннего края; далее пластинка подвергается нагрузке одиночной силой, прикладываемой в произвольном месте. Решение состоит из сингулярной и регулярной части, при чем для создания сингулярностей одиночной силы используется уже известная функция. Для этой функции при помощи интегральных формул функции Грина получается разложение в ряд Фурье. На основании этого разложения сингулярной части и используя краевые условия удается построение регулярной части.



## 1. Einleitung

Die unsymmetrische Biegung dünner Kreisplatten unter den bekannten Näherungsvoraussetzungen der elementaren Plattentheorie [1] ist erstmalig von A. CLEBSCH [2] bearbeitet und für punktförmig belastete volle Kreisplatten von A. FÖPPL [3] und A. NADAI [4] numerisch behandelt worden. Von J. H. MICHEL [5] und E. MELAN [6] wurden für die eingespannte volle Kreisplatte unter Einzellasten einfache geschlossene Lösungen angegeben. Zusammengesetzte unsymmetrische Biegungsfälle der eingespannten dünnen Kreisplatte wurden 1943 von W. MÜLLER [7] untersucht. E. REISSNER [8] löste erstmalig den Fall der vollen außen freiaufgelagerten Kreisplatte unter Einzellast in geschlossener Form. 1955 gab der Verfasser [9] eine einfache Näherungslösung für den von E. REISSNER behandelten Fall an.

Die Anwendung der CLEBSCHSchen Theorie auf eingespannte Kreisringplatten unter Einzelast scheint erstmalig von E. REISSNER [10] 1929 durchgeführt worden zu sein. In der vorliegenden Arbeit<sup>1)</sup> soll nun das Problem der an einer beliebigen Stelle durch eine Einzellast belasteten, am Außenrand freiaufgelagerten und am Innenrand freien Kreisringplatte (Bild 1) unter Benutzung der KIRCHHOFFSchen Plattentheorie [1] gelöst werden.

## 2. Die Entwicklungsformel der GREENSchen Funktion

Die Lösung des zu behandelnden Problems stellt gleichzeitig die GREENSche Funktion der Kreisringplatte dar. Deshalb muß nach dem Superpositionsprinzip [11] jeder beliebige Lastfall der Kreisringplatte durch Integration der bewichteten GREENSchen Funktion lösbar sein.

Gegeben sei ein ebener, einfach zusammenhängender Bereich, der durch eine Kurve mit der Bogenlänge  $ds$  begrenzt wird. Dann lautet die GREENSche Formel [12]

$$\int [u \Delta v - v \Delta u] dF = \oint \left[ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds \quad (1).$$

Hierin bedeuten  $u$  und  $v$  hinreichend oft stetig differenzierbare Funktionen im betrachteten Bereich und  $\frac{\partial}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla$  ihre Ableitungen nach der äußeren Normalen der Randkurve, wenn  $\mathbf{n}$  der Normaleneinheitsvektor und  $\nabla$  der HAMILTONSche nabla-Vektor ist. Unter Verwendung von  $\nabla$  gilt weiter  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ . Setzt man in (1)  $v = \Delta G$ , vertauscht dann in der so entstandenen Gleichung  $u$  und  $G$  und bildet die Differenz beider Gleichungen, so folgt:

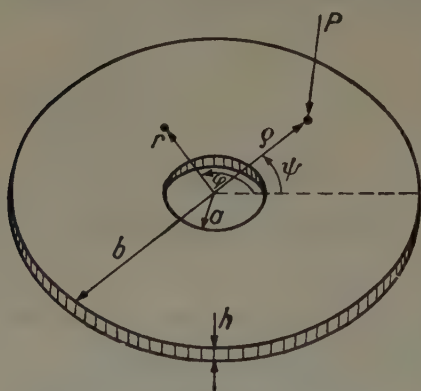


Bild 1. Kreisringplatte mit Einzellast

$$\int [G \Delta \Delta u - u \Delta \Delta G] dF = \oint \left[ G \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - u \frac{\partial \Delta G}{\partial n} - \Delta u \frac{\partial G}{\partial n} + \Delta G \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds \quad (2).$$

Bekanntlich [11] setzt sich die GREENSche Funktion aus einem singulären Anteil  $G_s$  und einem im ganzen Plattenbereich regulären Anteil  $G_0$  zusammen, so daß gilt, wenn  $\varrho, \psi$  die Polarkoordinaten des Einzellastpunktes und  $r, \varphi$  diejenigen eines beliebigen Plattenpunktes gemäß Bild 1 sind:

$$G(r, \varphi; \varrho, \psi) = G_s(r, \varphi; \varrho, \psi) + G_0(r, \varphi; \varrho, \psi) \quad (3).$$

Für  $G_s$  nehmen wir dieselbe Funktion, wie sie von E. REISSNER [8] für die Behandlung der Vollplatte benutzt wurde. Damit wird, wenn  $b$  der äußere Plattenradius ist,

$$G_s(r, \varphi; \varrho, \psi) = \frac{1}{16 \pi K} [r^2 + \varrho^2 - 2 r \varrho \cos(\varphi - \psi)] \ln \frac{b^2 [r^2 + \varrho^2 - 2 r \varrho \cos(\varphi - \psi)]}{b^4 + r^2 \varrho^2 - 2 b^2 r \varrho \cos(\varphi - \psi)} \quad (4).$$

Hierin bedeutet  $K$  die Plattensteifigkeit

$$K = \frac{E h^3}{12 (1 - \mu^2)} \quad (4a).$$

<sup>1)</sup> Der Verfasser dankt Herrn Prof. Dr.-Ing. K. MARGUERRE für die Anteilnahme an den Problemen dieser Arbeit und für die wertvollen Hinweise.

Zur Integration nach (2) legen wir um den Lastpunkt  $\varrho, \psi$  einen beliebig kleinen Kreis vom Radius  $\varepsilon > 0$  (Bild 2). Führen wir in diesem Kreis die lokalen Polarkoordinaten  $(\varepsilon, \alpha)$  ein, so gilt nach Bild 2

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^2 &= r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(\varphi - \psi) \\ r^2 &= \varepsilon^2 + \varrho^2 + 2\varepsilon\varrho \cos(\alpha - \psi) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5).$$

Es läßt sich dann leicht zeigen, daß für  $G_s$  gemäß (4), wenn  $\varrho, \psi$  feste Koordinaten des Lastpunktes sind, gilt:

$$G_s(r, \varphi; \varrho, \psi) = G_s(\varrho, \psi; r, \varphi) \dots \dots (6a),$$

$$G_s(b, \varphi; \varrho, \psi) \equiv 0 \dots \dots \dots (6b),$$

$G_s$  glatt im ganzen Plattenbereich, d. h. dort stetig  
differenzierbar nach  $r$  und  $\varphi$  (6c),

$G_s$  gerade Funktion um  $\varphi = \psi$  von der Periode  $2\pi$  (6d),

$$\Delta \Delta G_s = 0 \text{ außer in } (r, \varphi) = (\varrho, \psi) \dots (6e),$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \varepsilon G_s(r, \varphi; \varrho, \psi) \} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon \frac{\partial G_s(r, \varphi; \varrho, \psi)}{\partial \varepsilon} \right\} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \varepsilon \Delta G_s(r, \varphi; \varrho, \psi) \} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon \frac{\partial \Delta G_s(r, \varphi; \varrho, \psi)}{\partial \varepsilon} \right\} &= \frac{1}{2\pi K} \end{aligned} \right\} \dots (6f).$$

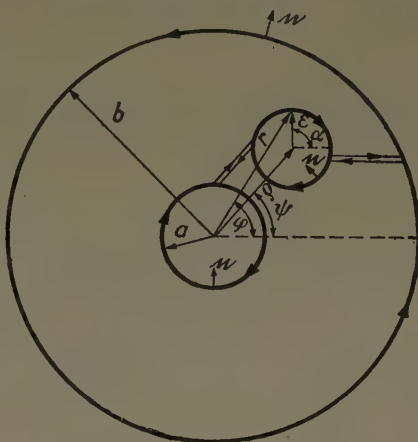


Bild 2. Integrationswege und Bezeichnungen für die Anwendung der Greenschen Formel

In den vorstehenden Formeln (6f) sind die Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  als Funktionen von  $(\varepsilon, \alpha)$  gemäß (5) aufzufassen. Der  $\Delta$ -Operator hingegen wird auf  $(r, \varphi)$  angewendet und dann erst ist auf  $(\varepsilon, \alpha)$  mit (5) zu transformieren.

Von der Funktion  $G_0$  aus (3) müssen wir nun fordern [11]:

$$G_0(r, \varphi; \varrho, \psi) = G_0(\varrho, \psi; r, \varphi) \dots \dots \dots (7a),$$

$$G_0 \text{ regulär im ganzen Plattenbereich} \dots \dots \dots (7b),$$

$$\Delta \Delta G_0 = 0 \text{ überall} \dots \dots \dots (7c).$$

Da auch die GREENSche Funktion des Problems aus Symmetriegründen eine gerade Funktion um  $\varphi = \psi$  mit der Periode  $2\pi$  sein muß, folgt mit (6d) aus (3)

$$G_0 \text{ gerade Funktion um } \varphi = \psi \text{ von der Periode } 2\pi \dots \dots \dots (7d).$$

Nehmen wir nun an, daß die Funktion  $u(r, \varphi)$  in (2) an den freien Rändern des Problems irgendwelche Randbedingungen der elementaren Plattentheorie [11] befriedigt und  $G(r, \varphi; \varrho, \psi)$  dieselben Randbedingungen erfüllt, so folgt aus (2) mit (4), wenn man  $\varepsilon \rightarrow 0$  bildet, unter Beachtung der Formelserien (6) und (7)

$$u(r, \varphi) = \iint G(r, \varphi; \varrho, \psi) p(\varrho, \psi) \varrho d\varrho d\psi \dots \dots \dots (8),$$

wobei

$$\Delta \Delta u(r, \varphi) = \frac{1}{K} \cdot p(r, \varphi) \dots \dots \dots (8a)$$

gilt und  $p(r, \varphi)$  in bekannter Weise [1] die flächenhaft verteilte Belastung der Platte bedeutet.

### 3. Die Fourier-Entwicklung von $G_s$

Wir betrachten jetzt die Funktionen

$$u_n(r, \varphi) = R_n(r) \cdot \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \dots \dots \dots (9).$$

Sollen die  $u_n(r, \varphi)$  Bipotentialfunktionen sein, also

$$\Delta \Delta u_n(r, \varphi) = 0 \dots \dots \dots (9a)$$

gelten, so folgt [10] für die  $R_n(r)$ :

$$R_0(r) = \zeta_{01} + \zeta_{02} \ln \frac{r}{b} + \zeta_{03} r^2 + \zeta_{04} r^2 \ln \frac{r}{b} \dots \dots \dots (10a),$$

$$R_1(r) = \zeta_{11} r + \zeta_{12} \cdot r^{-1} + \zeta_{13} r^3 + \zeta_{14} r \ln \frac{r}{b} \dots \dots \dots (10b),$$

$$R_n(r) = \zeta_{n1} r^n + \zeta_{n2} r^{-n} + \zeta_{n3} r^{n+2} + \zeta_{n4} r^{-n+2} \text{ für } n \geq 2 \dots (10c),$$

wobei die  $\zeta_{ni}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) willkürliche Konstante sind.



Mit Hilfe der  $u_n(r, \varphi)$  nach (9) konstruieren wir nun Funktionen  $w_n(r, \varphi)$  für die Durchbiegung von Platten mit den in Bild 3 dargestellten Auflagerungs- und Belastungsverhältnissen. Wir nehmen für  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$w_n(r, \varphi) = \begin{cases} \lambda_n(r) \cdot \cos n \varphi & \text{für } 0 \leq r \leq \varrho \\ R_n(r) \cdot \cos n \varphi & \text{für } \varrho \leq r \leq b \end{cases} \quad (11),$$

wobei  $R_n$  nach (10a), (10b) und (10c) gegeben ist und für das Gebiet der Belastung  $r \leq \varrho$

$$\lambda_n(r) = r^4 + c_{n1} r^n + c_{n3} r^{n+2} \quad (11a)$$

bedeutet mit  $c_{n1}$  und  $c_{n3}$  als vorerst beliebigen Konstanten.

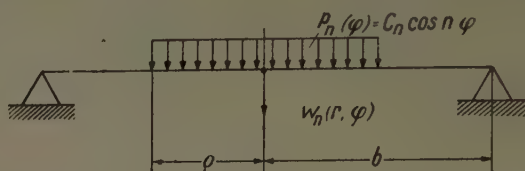


Bild 3. Belastungs- und Auflagerungsfall zur Konstruktion von  $w_n(r, \varphi)$

Aus (11) folgt durch Differentiation, wenn man (8a) beachtet

$$\Delta \Delta w_n(r, \varphi) = \frac{P_n(\varphi)}{K} = \begin{cases} (16 - n^2)(4 - n^2) \cos n \varphi & \text{für } 0 \leq r < \varrho \\ 0 & \text{für } \varrho \leq r \leq b \end{cases} \quad (12).$$

Aus den Rand- und Übergangsbedingungen der nach Bild 3 gegebenen Auflagerung folgt für die Funktionen  $\lambda_n(r)$  und  $R_n(r)$  aus (11):

$$\left. \begin{aligned} R_n(b) &= 0, \\ b \{R_n''(r)\}_{r=b} + \mu \{R_n'(r)\}_{r=b} &= 0, \\ \lambda_n(\varrho) &= R_n(\varrho); \quad \{\lambda_n'(r)\}_{r=\varrho} = \{R_n'(r)\}_{r=\varrho}; \\ \{\lambda_n''(r)\}_{r=\varrho} &= \{R_n''(r)\}_{r=\varrho}; \quad \{\lambda_n'''(r)\}_{r=\varrho} = \{R_n'''(r)\}_{r=\varrho} \\ &\text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (13).$$

Aus diesen 6 Gleichungen lassen sich leicht die Konstanten  $\zeta_{ni}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) und  $c_{n1}, c_{n3}$  für jedes  $n$  bestimmen. Es ergibt sich für  $n = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} c_{01} &= \varrho^2 \left[ \frac{4b^2(3 + \mu) - (7 + 3\mu)\varrho^2}{1 + \mu} + 4\varrho^2 \ln \frac{\varrho}{b} \right], \\ c_{03} &= 2\varrho^2 \left[ \frac{(1 - \mu)\varrho^2 - 4b^2}{b^2(1 + \mu)} + 4 \ln \frac{\varrho}{b} \right] \end{aligned} \right\} \quad (14a),$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{01} &= 2\varrho^2 \frac{2b^2(3 + \mu) - (1 - \mu)\varrho^2}{1 + \mu}; \quad \zeta_{02} = 4\varrho^4, \\ \zeta_{03} &= -2\varrho^2 \frac{2b^2(3 + \mu) - (1 - \mu)\varrho^2}{b^2(1 + \mu)}; \quad \zeta_{04} = 8\varrho^2 \end{aligned} \right\} \quad (14b),$$

und für  $n = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= \frac{\varrho^3}{4b^2(3 + \mu)} \left[ \frac{9}{2} \varrho^2(1 + \mu) + \frac{5}{2} b^2(3 - \mu) - 15b^2(3 + \mu) \ln \frac{\varrho}{b} \right], \\ c_{13} &= \frac{3\varrho}{8b^4(3 + \mu)} \left[ -\frac{15}{2} b^4(3 + \mu) + 5\varrho^2 b^2(1 + \mu) + \frac{3}{2} \varrho^4(1 - \mu) \right] \end{aligned} \right\} \quad (15a),$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{11} &= \frac{3\varrho^3(1 + \mu)}{8b^2(3 + \mu)} [3\varrho^2 - 5b^2]; \quad \zeta_{12} = -\frac{9}{16} \varrho^5, \\ \zeta_{13} &= \frac{3\varrho^3}{16b^4(3 + \mu)} [10b^2(1 + \mu) + 3\varrho^2(1 - \mu)]; \quad \zeta_{14} = -\frac{15}{4} \varrho^3 \end{aligned} \right\} \quad (15b),$$

und endlich für  $n \geq 2$ :

$$\left. \begin{aligned} c_{n1} &= \frac{-1}{b^{2n}(2n+1+\mu)} [(2n+1+\mu) \varrho^{-n+4} \cdot b^{2n} \cdot a_1 + (n+1)(1+\mu) \varrho^{n+4} a_2 \\ &\quad + n(3+\mu) \varrho^{n+2} b^2 \cdot a_4], \\ c_{n3} &= \frac{-1}{2n+1+\mu} [n(1-\mu) \varrho^{n+4} \cdot a_2 + (2n+1+\mu) \varrho^{-n+2} b^{2n+2} \cdot a_3 \\ &\quad - (n-1)(1+\mu) \varrho^{n+2} b^2 \cdot a_4] \end{aligned} \right\} (16a),$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{n1} &= \frac{-\varrho^{n+2}}{b^{2n}(2n+1+\mu)} [(n+1)(1+\mu) \varrho^2 \cdot a_2 + n(3+\mu) b^2 \cdot a_4]; \quad \zeta_{n2} = \varrho^{n+4} \cdot a_2, \\ \zeta_{n3} &= \frac{-\varrho^{n+2}}{b^{2n+2}(2n+1+\mu)} [n(1-\mu) \varrho^2 \cdot a_2 - (n-1)(1+\mu) b^2 \cdot a_4]; \quad \zeta_{n4} = \varrho^{n+2} \cdot a_4 \end{aligned} \right\} (16b),$$

wobei gilt

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (n^2-4) \frac{(n+4)(n+1)}{8n(n^2-1)}; & a_2 &= -(n^2-4) \frac{(n-4)(n-1)}{8n(n^2-1)}; \\ a_3 &= -(n^2-16) \frac{(n+2)(n-1)}{8n(n^2-1)}; & a_4 &= (n^2-16) \frac{(n-2)(n+1)}{8n(n^2-1)} \end{aligned} \right\} (16c).$$

Die GREENSCHE Funktion der freiaufgelagerten Vollkreisplatte ist nach E. REISSNER [8] bekannt und heißt mit  $G_s$  nach (4):

$$\begin{aligned} G_R(r, \varphi; \varrho, \psi) &= G_s + (b^2 - \varrho^2)(b^2 - r^2) \frac{3 + \mu}{b^2(1 + \mu)} \cdot \frac{1}{16 \pi K} \\ &\quad + \frac{1}{4 \pi K} (b^2 - \varrho^2)(b^2 - r^2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\varrho r)^m \cos m(\varphi - \psi)}{b^{2m+2}(2m+1+\mu)} \dots (17). \end{aligned}$$

Mithin muß sich wegen (8) die Lösung  $w_n(r, \varphi)$  aus (11) für das Plattenproblem der Abb. 3 auch durch die Funktion  $G_R$  darstellen lassen. Nach (8) und (8a) wird unter Beachtung von (12) wenn wir  $\varrho$  in  $G_R$  und (8) durch  $\xi$  ersetzen und für  $u(r, \varphi)$  in (8)  $w_n(r, \varphi)$  schreiben

$$w_n(r, \varphi) = K(16 - n^2)(4 - n^2) \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi \int_{\xi=0}^{\varrho} \xi d\xi G_R(r, \varphi; \xi, \psi) \cos n \psi \dots (18).$$

In (18) sind alle Funktionen bekannt und wir können über den regulären Teil von  $G_R$  einfach integrieren, wenn wir die Orthogonalitätsrelationen beachten:

$$\int_{\psi=0}^{2\pi} \cos m(\varphi - \psi) \cdot \cos n \psi d\psi = \begin{cases} \pi \cdot \cos n \varphi & \text{für } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{für } m \neq n \\ 2\pi & \text{für } m = n = 0 \end{cases} \dots (19).$$

Dadurch erhält man gemäß (17) aus (18) Flächenintegrale allein für die Funktion  $G_s$  nach (4). Differenziert man anschließend auf beiden Seiten der so entstandenen Gleichung nach  $\varrho$ , was wegen der Stetigkeit von  $G_R(r, \varphi; \xi, \psi)$  in  $\xi$  erlaubt [13] ist, so entsteht für  $n = 0$

$$\int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi G_s(r, \varphi; \varrho, \psi) = \left[ A_{01}(\varrho) + A_{02}(\varrho) \ln \frac{r}{b} + A_{03}(\varrho) r^2 + A_{04}(\varrho) r^2 \ln \frac{r}{b} \right] \equiv F_0(r; \varrho) \quad (20)$$

mit

$$A_{01}(\varrho) = \frac{1}{4K} \begin{cases} \varrho^2 & \text{für } \varrho < r \\ \varrho^2 \ln \frac{\varrho}{b} & \text{für } \varrho \geq r \end{cases} \dots (21a),$$

$$A_{02}(\varrho) = \frac{1}{4K} \begin{cases} \varrho^2 & \text{für } \varrho < r \\ 0 & \text{für } \varrho \geq r \end{cases} \dots (21b),$$

$$A_{03}(\varrho) = \frac{1}{4K} \begin{cases} -\frac{\varrho^2}{b^2} & \text{für } \varrho < r \\ -\frac{\varrho^2}{b^2} + 1 + \ln \frac{\varrho}{b} & \text{für } \varrho \geq r \end{cases} \dots (21c),$$

$$A_{04}(\varrho) = \frac{1}{4K} \begin{cases} 1 & \text{für } \varrho < r \\ 0 & \text{für } \varrho \geq r \end{cases} \dots (21d)$$



und für  $n = 1$

$$\int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi G_s(r, \varphi; \varrho, \psi) \cos \psi = \left[ A_{11}(\varrho) r + A_{12}(\varrho) r^{-1} + A_{13}(\varrho) r^3 + A_{14}(\varrho) r \ln \frac{r}{b} \right] \cos \varphi \equiv F_1(r; \varrho) \cos \varphi \quad (22),$$

wobei

$$A_{11}(\varrho) = \frac{1}{16 K} \begin{cases} 2 \frac{\varrho}{b^2} (\varrho^2 - b^2) & \text{für } \varrho < r \\ 2 \frac{\varrho}{b^2} (\varrho^2 - b^2) - 4 \frac{\varrho}{b} \ln \frac{\varrho}{b} & \text{für } \varrho \geq r \end{cases} \quad (23a),$$

$$A_{12}(\varrho) = \frac{1}{16 K} \begin{cases} -\varrho^3 & \text{für } \varrho < r \\ 0 & \text{für } \varrho \geq r \end{cases} \quad (23b),$$

$$A_{13}(\varrho) = \frac{1}{16 K} \begin{cases} \frac{\varrho}{b^4} (2b^2 - \varrho^2) & \text{für } \varrho < r \\ \frac{\varrho}{b^4} (2b^2 - \varrho^2) - \frac{1}{\varrho} & \text{für } \varrho \geq r \end{cases} \quad (23c),$$

$$A_{14}(\varrho) = \frac{1}{16 K} \begin{cases} -4 \varrho & \text{für } \varrho < r \\ 0 & \text{für } \varrho \geq r \end{cases} \quad (23d),$$

während sich für  $n \geq 2$  ergibt:

$$\int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi G_s(r, \varphi; \varrho, \psi) \cos n \psi = [A_{n1}(\varrho) r^n + A_{n2}(\varrho) r^{-n} + A_{n3}(\varrho) r^{n+2} + A_{n4}(\varrho) r^{-n+2}] \cos n \varphi \equiv F_n(r; \varrho) \cos n \varphi \quad (24).$$

Hierin bedeuten

$$A_{n1}(\varrho) = \frac{1}{8 K} \begin{cases} \frac{\varrho^n}{b^{2n}} \left[ \frac{\varrho^2}{n} - \frac{b^2}{n-1} \right] & \text{für } \varrho < r \\ \frac{\varrho^n}{b^{2n}} \left[ \frac{\varrho^2}{n} - \frac{b^2}{n-1} \right] + \frac{\varrho^{-n+2}}{n(n-1)} & \text{für } \varrho \geq r \end{cases} \quad (25a),$$

$$A_{n2}(\varrho) = \frac{1}{8 K} \begin{cases} -\frac{\varrho^{n+2}}{n(n+1)} & \text{für } \varrho < r \\ 0 & \text{für } \varrho \geq r \end{cases} \quad (25b),$$

$$A_{n3}(\varrho) = \frac{1}{8 K} \begin{cases} \frac{\varrho^n}{b^{2n+2}} \left[ \frac{b^2}{n} - \frac{\varrho^2}{n+1} \right] & \text{für } \varrho < r \\ \frac{\varrho^n}{b^{2n+2}} \left[ \frac{b^2}{n} - \frac{\varrho^2}{n+1} \right] - \frac{\varrho^{-n}}{n(n+1)} & \text{für } \varrho \geq r \end{cases} \quad (25c),$$

$$A_{n4}(\varrho) = \frac{1}{8 K} \begin{cases} \frac{\varrho^n}{n(n-1)} & \text{für } \varrho < r \\ 0 & \text{für } \varrho \geq r \end{cases} \quad (25d).$$

Wegen (6c) und (6d) existiert für  $G_s$  nach (4), wie man weiß [13], eine absolut und gleichmäßig konvergente FOURIERREIHE von der Form

$$G_s(r, \varphi; \varrho, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m(r; \varrho) \cos m(\varphi - \psi). \quad (26).$$

Unter Beachtung der Orthogonalitätsrelationen (19) für die trigonometrischen Funktionen ergibt sich für die FOURIERKoeffizienten  $\Gamma_m$  aus (26), wenn man (20), (22) und (24) berücksichtigt:

$$\Gamma_0(r; \varrho) = \frac{1}{2\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi G_s(r, \varphi; \varrho, \psi) = \frac{1}{2\pi} F_0(r; \varrho) \quad (26a)$$

und für  $n \geq 1$

$$\Gamma_n(r; \varrho) \cdot \cos n \varphi = \frac{1}{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi G_s(r, \varphi; \varrho, \psi) \cdot \cos n \psi = \frac{1}{\pi} F_n(r; \varrho) \cos n \varphi \quad (26b).$$

Damit ist die FOURIERentwicklung des singulären Teiles  $G_s$  der gesuchten GREENSchen Funktion gegeben, denn  $F_0(r; \varrho)$  und  $F_n(r; \varrho)$  für  $n \geq 1$  sind nach (20), (22) und (24) bekannte Funktionen. Für diese gilt mit  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ :

$$\left. \begin{aligned} F_m(\varrho - 0; \varrho) &= F_m(\varrho + 0; \varrho), \\ \left\{ \frac{\partial F_m(r; \varrho)}{\partial r} \right\}_{r=\varrho-0} &= \left\{ \frac{\partial F_m(r; \varrho)}{\partial r} \right\}_{r=\varrho+0}, \\ \left\{ \frac{\partial^2 F_m(r; \varrho)}{\partial r^2} \right\}_{r=\varrho-0} &= \left\{ \frac{\partial^2 F_m(r; \varrho)}{\partial r^2} \right\}_{r=\varrho+0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26c).$$

Mit Hilfe von (26) ist es nun ohne große Mühe möglich, auch den regulären Teil  $G_0$  aus (3) zu konstruieren.

#### 4. Konstruktion des regulären Teiles $G_0$ der GREENSchen Funktion

Aus (7b) und (7d) folgt [13], daß sich die gesuchte Funktion  $G_0(r, \varphi; \varrho, \psi)$  durch eine gleichmäßig und absolut konvergente FOURIERreihe darstellen läßt. Wenn wir mit  $\Omega_m(r, \varrho)$  die FOURIERkoeffizienten bezeichnen, so gilt:

$$G_0(r, \varphi; \varrho, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \Omega_m(r; \varrho) \cdot \cos m(\varphi - \psi) \dots \dots \dots (27).$$

Aus (3), (26), (27) folgt

$$G(r, \varphi; \varrho, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \Theta_m(r; \varrho) \cos m(\varphi - \psi) \dots \dots \dots (28),$$

mit

$$\Theta_m(r; \varrho) = I_m(r; \varrho) + \Omega_m(r; \varrho) \dots \dots \dots (28a).$$

Die Funktion  $G_0$  mit den von (7a) bis (7d) geforderten Eigenschaften, die danach eine konvergente FOURIERentwicklung gemäß (27) besitzt, wird bekanntlich [14] eindeutig festgelegt, indem man eine biharmonische Funktion  $G_0$  sucht derart, daß für  $G$  aus (3) die Randbedingungen des Problems nach Bild 4 befriedigt werden. Deshalb können wir  $\Omega_m$  aus (27) auf folgende Weise ermitteln.

Setzt man (27) in (7c) ein, so gilt für jede Komponente der FOURIERentwicklung von  $G_0$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Delta [\Omega_m(r; \varrho) \cos m\varphi] &= 0, \\ \Delta \Delta [\Omega_m(r; \varrho) \sin m\varphi] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29).$$

Wegen (9) und (9a) erkennt man, daß  $\Omega_m$  denselben Aufbau haben muß wie die Funktionen  $R_n$  aus (10a), (10b) und (10c); aus (29) folgt daher mit vorerst beliebigen Konstanten  $\bar{X}_{ni}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $i = 1, 2, 3, 4$ )

$$\Omega_0(r) = \bar{X}_{01} + \bar{X}_{02} \ln \frac{r}{b} + \bar{X}_{03} r^2 + \bar{X}_{04} r^2 \ln \frac{r}{b} \dots \dots \dots (30),$$

$$\Omega_1(r) = \bar{X}_{11} r + \bar{X}_{12} r^{-1} + \bar{X}_{13} r^3 + \bar{X}_{14} r \ln \frac{r}{b} \dots \dots \dots (31),$$

$$\Omega_n(r) = \bar{X}_{n1} r^n + \bar{X}_{n2} r^{-n} + \bar{X}_{n3} r^{n+2} + \bar{X}_{n4} r^{-n+2} \quad \text{für} \quad n \geq 2 \dots \dots (32).$$

Geht man nun mit (30), (31), (32) und (26a), (26b) in (28a) ein und beachtet dabei (20), (22) und (24), so entsteht für die FOURIERkoeffizienten  $\Theta_m$  der GREENSchen Funktion selbst

$$\Theta_0(r) = Y_{01} + Y_{02} \ln \frac{r}{b} + Y_{03} r^2 + Y_{04} r^2 \ln \frac{r}{b} \dots \dots \dots (33a),$$

$$\Theta_1(r) = Y_{11} r + Y_{12} r^{-1} + Y_{13} r^3 + Y_{14} r \ln \frac{r}{b} \dots \dots \dots (33b),$$

$$\Theta_n(r) = Y_{n1} r^n + Y_{n2} r^{-n} + Y_{n3} r^{n+2} + Y_{n4} r^{-n+2} \quad \text{für} \quad n \geq 2 \dots \dots (33c),$$

wobei mit den  $A_{ni}$  aus (20), (22) und (24) für  $Y_{ni}$  gilt

$$\left. \begin{aligned} Y_{0i} &= \frac{1}{2\pi} A_{0i} + \bar{X}_{0i}, \\ Y_{ni} &= \frac{1}{\pi} A_{ni} + \bar{X}_{ni} \quad \text{für} \quad n \geq 1 \\ \text{und} \quad i &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34).$$



Schließlich muß die gesuchte GREENSCHE Funktion  $G$  noch die Randbedingungen am Innen- und Außenrand der Platte nach Bild 4 befriedigen.

Aus der elementaren Plattentheorie [1] folgt bei freidrehbarer Auflagerung am Außenrand  $r = b > \varrho$  für die FOURIERKoeffizienten  $\Theta_m$  aus (28) und  $m = 0, 1, 2, 3 \dots$ :

$$\left. \begin{aligned} \Theta_m(b) &= 0, \\ b \{\Theta_m''(r)\}_{r=b} + \mu \{\Theta_m'(r)\}_{r=b} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35a)$$

und für den freien Innenrand  $r = a < \varrho$  (vgl. Bild 4)

$$\left. \begin{aligned} a^2 \{\Theta_m''(r)\}_{r=a} + a \mu \{\Theta_m'(r)\}_{r=a} - \mu m^2 \Theta_m(a) &= 0, \\ a^3 \{\Theta_m'''(r)\}_{r=a} - a [1 + 2m^2 - (m^2 - 1)\mu] \{\Theta_m''(r)\}_{r=a} + 3m^2 \Theta_m'(a) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (35b).$$

Aus den bekannten [13] Formeln für die Berechnung der FOURIERKoeffizienten, wie sie zum Beispiel in (26a) und (26b) angegeben sind, folgt, daß die einzeln abgeleiteten FOURIERKoeffizienten aus (28)  $\Theta_m(r; \varrho)$  bis zur dritten Ableitung nach  $r$  die abgeleitete Funktion  $G$  in der FOURIERSUMME wieder darstellen, wenn die Ableitungen von  $G$  selbst bis zur dritten Ordnung innerhalb eines beliebigen, abgeschlossenen Randstreifens glatt sind; das ist der Fall, so lange  $a < \varrho < b$  gilt. Deshalb müssen wir für die Befriedigung der Randbedingungen vorerst fordern:

$$a < \varrho < b \dots \dots \dots (35c).$$

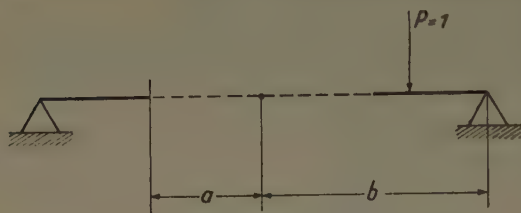


Bild 4. Auflagerung und Belastung der Kreisringplatte

Nimmt man nun in (35a) und (35b)  $m = 0$ , so erhält man mit (33a) ein homogenes Gleichungssystem für die  $Y_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Ersetzt man dann die  $Y_{0i}$  nach (34), so entsteht unter Beachtung von (21a), (21b), (21c) und (21d) ein inhomogenes Gleichungssystem für  $\bar{X}_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), dessen Lösungen lauten:

$$\bar{X}_{01}(\varrho) = -b^2 \bar{X}_{03}(\varrho) \dots \dots \dots (30a),$$

$$\bar{X}_{02}(\varrho) = \frac{a^2}{8\pi K(b^2 - a^2)} \left\{ (\varrho^2 - b^2) + 2b^2 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \ln \frac{\varrho}{b} \right\} \dots \dots \dots (30b),$$

$$\bar{X}_{03}(\varrho) = \frac{1}{16\pi K(b^2 - a^2)} \left\{ \left[ \frac{3 + \mu}{1 + \mu} - 2 \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right] (\varrho^2 - b^2) + 2a^2 \ln \frac{\varrho}{b} \right\} \dots \dots (30c),$$

$$\bar{X}_{04} = 0 \dots \dots \dots (30d).$$

Mit  $m = 1$  in (35a) und (35b) entsteht auf dieselbe Weise mit (23a), (23b), (23c) und (23d), wenn man (33b) und (34) berücksichtigt, ein Gleichungssystem für  $\bar{X}_{1i}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), dessen Lösungen lauten:

$$\bar{X}_{11}(\varrho) = -\frac{1}{b^2} \bar{X}_{12}(\varrho) - b^2 \bar{X}_{13}(\varrho) \dots \dots \dots (31a),$$

$$\bar{X}_{12}(\varrho) = \frac{a^4}{16\pi K(b^4 - a^4)} \left\{ \varrho(b^2 - \varrho^2) + \frac{3 + \mu}{1 - \mu} b^2 \frac{b^2 - \varrho^2}{\varrho} \right\} \dots \dots \dots (31b),$$

$$\bar{X}_{13}(\varrho) = \frac{1}{16\pi K(b^4 - a^4)} \left\{ \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^4 - \frac{4}{3 + \mu} \right] \varrho(b^2 - \varrho^2) - a^4 \frac{b^2 - \varrho^2}{b^2 \varrho} \right\} \dots \dots (31c),$$

$$\bar{X}_{14} = 0 \dots \dots \dots (31d).$$

Für  $m = n \geq 2$  folgt aus (35a) und (35b), wenn man (33c) einsetzt und mit (34) bei Berücksichtigung von (25a), (25b), (25c) und (25d) auf  $\bar{X}_{ni}$  übergeht

$$b^{2n} \bar{X}_{n1}(\varrho) + \bar{X}_{n2}(\varrho) + b^{2n+2} \bar{X}_{n3}(\varrho) + b^2 \bar{X}_{n4}(\varrho) = 0 \dots \dots \dots (32a),$$

$$\begin{aligned} n(n-1 + \mu) b^{2n} \bar{X}_{n1}(\varrho) + n(n+1 - \mu) \bar{X}_{n2}(\varrho) + (n+2)(n+1 + \mu) b^{2n+2} \bar{X}_{n3}(\varrho) \\ + (n-2)(n-1 - \mu) b^2 \bar{X}_{n4}(\varrho) = \frac{1}{8\pi K} \{ -4\varrho^n(b^2 - \varrho^2) \} \end{aligned} \quad (32b),$$

$$\begin{aligned} n(n-1)(1 - \mu) a^{2n} \bar{X}_{n1}(\varrho) + n(n+1)(1 - \mu) \bar{X}_{n2}(\varrho) + (n+1) \gamma a^{2n+2} \bar{X}_{n3}(\varrho) + (n-1) \beta a^2 \bar{X}_{n4}(\varrho) \\ = \frac{1}{8\pi K} \left\{ \frac{a^{2n}}{n b^{2n-2}} \left[ n^2(1 - \mu) - (n+1) \left( \frac{a}{b} \right)^2 \gamma \right] \varrho^n + \frac{a^{2n+2}}{n} \gamma \varrho^{-n} \right. \\ \left. + \left( \frac{a}{b} \right)^{2n} \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^2 \gamma - (n-1)(1 - \mu) \right] \varrho^{n+2} - a^{2n}(1 - \mu) \varrho^{-n+2} \right\} \dots \dots (32c), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (1 - \mu) n a^{2n} \bar{X}_{n1}(\varrho) + (1 - \mu) n \bar{X}_{n2}(\varrho) - \beta a^{2n+2} \bar{X}_{n3}(\varrho) + \gamma a^2 \bar{X}_{n4}(\varrho) \\
 & = \frac{1}{8\pi K} \left\{ \frac{a^{2n}}{b^{2n-2} n(n-1)} \left[ (n-1) \left( \frac{a}{b} \right)^2 \beta - n^2 (1 - \mu) \right] \varrho^n - \frac{a^{2n+2}}{n(n+1)} \beta \varrho^{-n} \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{a}{b} \right)^{2n} \frac{1}{n+1} \left[ (n+1) (1 - \mu) - \left( \frac{a}{b} \right)^2 \beta \right] \varrho^{n+2} + \frac{a^{2n}}{n-1} (1 - \mu) \varrho^{-n+2} \right\} \quad (32d),
 \end{aligned}$$

wobei

$$\gamma = n(1 - \mu) + 2(1 + \mu) \quad (32e),$$

$$\beta = n(1 - \mu) - 2(1 + \mu) \quad (32f)$$

bedeuten. (32a), (32b), (32c) und (32d) sind vier lineare Gleichungen mit nichtverschwindender Determinante, aus denen für jedes  $n \geq 2$  die  $\bar{X}_{ni}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) ermittelt werden können<sup>2)</sup>.

Damit ist wegen (35c) vorerst eine Lösung für das offene Gebiet  $a < \varrho < b$  konstruiert worden. Die Lösung für  $\varrho = b$  heiße  $\bar{G}(r, \varphi; b, \psi)$  und jene für  $\varrho = a$ :  $\bar{G}(r, \varphi; a, \psi)$ . Wegen (6a) und (7a) gilt mit (3) unter Beachtung von (6b) und (35a)

$$0 \equiv G(b, \varphi; \varrho, \psi) = G(\varrho, \psi; b, \varphi) \equiv \bar{G} \quad (36a)$$

und

$$G(a, \varphi; \varrho, \psi) = G(\varrho, \psi; a, \varphi) \equiv \bar{G} \quad (36b).$$

Aus (36a) ergibt sich  $\bar{G}$  für alle  $r$  und  $\varphi$  als triviale Lösung, und wir können  $\varrho = b$  wieder zulassen. Aus (36b) erkennt man, daß nachträglich  $\varrho = a$  auch zugelassen werden darf, jedoch wegen (35c) für  $r$  nur im halboffenen Intervall  $a < r \leq b$ . Da aber die im abgeschlossenen Intervall  $a \leq r \leq b$  gesuchte glatte Lösung  $\bar{G}$  mit der bereits gefundenen gemäß (36b) im halboffenen Intervall  $a < r \leq b$  übereinstimmt, ist  $\bar{G}$  aus Stetigkeitsgründen mit der schon bekannten Lösung  $G$  auch in  $r = a$  identisch, sofern  $G$  dort beschränkt bleibt. Das ist mit (3) unter Berücksichtigung von (6c) und (7b) für die Funktion  $G$  selbst und ihre ersten Ableitungen nach  $r, \varphi$  der Fall.

Betrachtet man nun die Funktionen  $\Omega_0$  und  $\Omega_1$  aus (30) und (31) und beachtet (30a), (30b), (30c), (30d) bzw. (31a), (31b), (31c), (31d), so erkennt man, daß gilt

$$\Omega_0(r; \varrho) = \Omega_0(\varrho; r); \quad \Omega_1(r; \varrho) = \Omega_1(\varrho; r) \quad (37).$$

Zum Nachweis der Symmetrie von  $\Omega_n(r; \varrho)$  für  $n \geq 2$  fassen wir in bekannter Weise die Quadrupel  $\{r^n; r^{-n}; r^{n+2}; r^{-n+2}\}$ ,  $\{\bar{X}_{n1}; \bar{X}_{n2}; \bar{X}_{n3}; \bar{X}_{n4}\}$  und  $\{\varrho^n; \varrho^{-n}; \varrho^{n+2}; \varrho^{-n+2}\}$  als „Spaltenvektoren“ [15] einer vierreihigen Matrix auf und bezeichnen sie mit  $(r)_n$ ,  $(\bar{x})_n$ ,  $(\varrho)_n$ .

Hiermit läßt sich (32) wie folgt schreiben

$$\Omega_n(r; \varrho) = (r)_n^* (\bar{x})_n \quad (38),$$

wo  $(r)_n^*$  die transponierte Matrix bedeutet. Das lineare Gleichungssystem (32a), (32b), (32c), (32d) läßt sich in Matrixschreibweise darstellen

$$\mathfrak{M}_n (\bar{x})_n = \mathfrak{N}_n \cdot (\varrho)_n \quad (39),$$

wenn  $\mathfrak{M}_n$  die Koeffizientenmatrix der  $\bar{X}_{ni}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) und  $\mathfrak{N}_n$  diejenige der  $\varrho^n, \varrho^{-n}, \varrho^{n+2}, \varrho^{-n+2}$  ist. Wegen der nichtverschwindenden Determinante von  $\mathfrak{M}_n$  folgt aus (39)

$$(\bar{x})_n = \mathfrak{M}_n^{-1} \mathfrak{N}_n \cdot (\varrho)_n \equiv \bar{\mathfrak{D}}_n \cdot (\varrho)_n \quad (40).$$

Mit (40) wird aus (38)

$$\Omega_n(r; \varrho) = (r)_n^* \bar{\mathfrak{D}}_n (\varrho)_n \quad (38a).$$

Betrachtet man die Quotienten  $\frac{\bar{D}_{nik}}{\bar{D}_{nki}}$  ( $i, k = 1, 2, 3, 4$ ) der an der Hauptdiagonale gespiegelten Elemente von  $\bar{\mathfrak{D}}_n$ , so erkennt man, daß gilt

$$\bar{\mathfrak{D}}_n = \bar{\mathfrak{D}}_n^* \quad \text{für} \quad n \geq 2 \quad (41).$$

Bilden wir nun gemäß (38a)

$$\Omega_n(\varrho; r) = (\varrho)_n^* \bar{\mathfrak{D}}_n (r)_n = (r)_n^* \bar{\mathfrak{D}}_n^* (\varrho)_n \quad (42);$$

so gilt wegen (41) und (38a)

$$\Omega_n(r; \varrho) = \Omega_n(\varrho; r) \quad \text{für} \quad n \geq 2 \quad (43).$$

Aus (37) und (43) folgt, daß die nach (27) konstruierte Funktion  $G_0$  symmetrisch ist, daß also (7a) befriedigt wird.

<sup>2)</sup> Für die mühevollen algebraische Auflösung dieser vier linearen Gleichungen nach dem GAUSSschen Algorithmus dankt der Verfasser Herrn Dipl.-Math. KONRAD HOYER. Die Ergebnisse sind in übersichtlicher Form im Abschnitt 5 mitgeteilt.



Selbstverständlich geht die GREENSCHE Funktion  $G$  für verschwindenden Innenradius  $a \rightarrow 0$  in die von E. REISSNER abgeleitete Lösung für die Vollkreisplatte gemäß (17) über. Für  $a \rightarrow 0$  folgt nämlich aus (40) für  $n \geq 2$   $\bar{X}_{n2} = \bar{X}_{n4} \equiv 0$  und  $\bar{X}_{n1}, \bar{X}_{n3}$  sind aus (32a) und (32b) zu ermitteln.

Die numerische Auswertung der hier abgeleiteten GREENSCHEN Funktion für die außen aufgelagerte und innen freie Kreisringplatte legt die Verwendung elektronischer Rechenmaschinen nahe.

### 5. Numerische Behandlung des Problems

Für die numerische Behandlung der abgeleiteten Formeln gehen wir auf dimensionslose Größen über, indem wir setzen

$$\left. \begin{aligned} r &= b \cdot R; & \varrho &= b \cdot S; & a &= b \cdot A, \\ G(r, \varphi; \varrho, \psi) &= \frac{b^2}{8\pi K} \cdot H(R, \varphi; S, \psi) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44).$$

Damit ist nach (3) die dimensionslose GREENSCHE Funktion  $H$  gegeben durch

$$H(R, \varphi; S, \psi) = H_s(R, \varphi; S, \psi) + H_0(R, \varphi; S, \psi) \dots \dots \dots (45),$$

$H_s$  ist der singuläre Anteil

$$H_s(R, \varphi; S, \psi) = \frac{R^2 + S^2 - 2RS \cos(\varphi - \psi)}{2} \cdot \ln \frac{R^2 + S^2 - 2RS \cos(\varphi - \psi)}{1 + R^2 S^2 - 2RS \cos(\varphi - \psi)} \quad (45a),$$

$H_0$  der reguläre Teil

$$H_0(R, \varphi; S, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(R; S) \cos n(\varphi - \psi) \dots \dots \dots (45b).$$

Aus (30) wird dann unter Beachtung von (30a), (30b), (30c) und (30d)

$$T_0(R, S) = X_{01}(S) \cdot (R^2 - 1) + X_{02}(S) \cdot \ln R \dots \dots \dots (46),$$

mit

$$\left. \begin{aligned} X_{01}(S) &= \frac{1}{2(1-A^2)} \left\{ \left[ \left( \frac{3+\mu}{1+\mu} \right) - 2A^2 \right] (S^2 - 1) + 2A^2 \ln S \right\}, \\ X_{02}(S) &= \frac{A^2}{(1-A^2)} \left[ (S^2 - 1) + 2 \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \ln S \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (46a).$$

Ebenso folgt aus (31), wenn man (31a), (31b), (31c) und (31d) berücksichtigt,

$$T_1(R, S) = X_{11}(S) \cdot \frac{(1-R^2)}{R} + X_{12}(S) \cdot R(1-R^2) \dots \dots \dots (47),$$

mit

$$\left. \begin{aligned} X_{11}(S) &= \frac{A^4}{2(1-A^4)} \left[ \left( \frac{3+\mu}{1-\mu} \right) + S^2 \right] \frac{(1-S^2)}{S}, \\ X_{12}(S) &= \frac{1}{2(1-A^4)} \left[ A^4(1-S^2) + \frac{4}{(3+\mu)} S^2 \right] \frac{(1-S^2)}{S} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (47a).$$

Schließlich ergibt sich für  $n \geq 2$  gemäß (32)

$$T_n(R, S) = X_{n1}(S) R^n + X_{n2}(S) R^{-n} + X_{n3}(S) R^{n+2} + X_{n4}(S) R^{2-n} \dots \dots (48).$$

Nach (40) kann man nun schreiben

$$X_{ni}(S) = D_{ni1} S^n + D_{ni2} S^{-n} + D_{ni3} S^{n+2} + D_{ni4} S^{2-n} \quad (\text{für } i = 1, \dots, 4) \quad (48a).$$

Mit (44) folgt aus (45b) und (27) unter Beachtung von (48) und (32) für  $n \geq 2$

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_{n1} &= \frac{b^{2-n}}{8\pi K} X_{n1}; & \bar{X}_{n2} &= \frac{b^{n+2}}{8\pi K} X_{n2}, \\ \bar{X}_{n3} &= \frac{b^{-n}}{8\pi K} X_{n3}; & \bar{X}_{n4} &= \frac{b^n}{8\pi K} X_{n4} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (49).$$

Geht man mit (49) in das lineare Gleichungssystem (32a), (32b), (32c), (32d) ein und ersetzt die  $X_{ni}$  gemäß (48a), so erhält man für die  $D_{nik}$  aus (48a) durch Koeffizientenvergleich vier lineare Gleichungssysteme ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) vierter Ordnung ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), deren Lösungen mit

$$\begin{aligned} Q_n &= A^{4n}(3+\mu)[2n-(1+\mu)] + A^{2n+2}[n^2(1-\mu)^2 + 8(1+\mu)] + A^{2n}2(n^2-1)(1-\mu^2) \\ &\quad - A^{2n-2}n^2(3+\mu)(1-\mu) - (3+\mu)[2n+(1+\mu)] \dots \dots \dots (50) \end{aligned}$$

lauten:

$$\begin{aligned}
 D_{n11} \cdot Q_n &= A^{4n} \frac{(3 + \mu) [2n - (1 + \mu)]}{(n - 1)} + A^{2n} 2(n + 1) (1 - \mu^2) \\
 &+ A^{2n+2} \frac{[n^2(1 - \mu^2) + 8(1 + \mu)] [n(1 - \mu) - (1 + \mu)]}{n^2(1 - \mu)} \\
 &- A^{2n-2} \frac{n^2(3 + \mu) (1 - \mu)}{(n - 1)} - 2(3 + \mu), \\
 D_{n12} \cdot Q_n &\equiv D_{n21} \cdot Q_n = A^{2n+2} \frac{(1 + \mu)}{n^2(1 - \mu)} [n^2(1 - \mu^2) + 8(1 + \mu)] - A^{2n} (3 + \mu) (1 - \mu), \\
 D_{n13} \cdot Q_n &\equiv D_{n31} \cdot Q_n = \{A^{2n} (1 - \mu) [2n - (1 + \mu)] - (3 + \mu) (1 + \mu) - Q_n\} \frac{1}{n}, \\
 D_{n14} \cdot Q_n &\equiv D_{n41} \cdot Q_n = -A^{4n} \frac{(3 + \mu) [2n - (1 + \mu)]}{n(n - 1)} - A^{2n} \frac{(n + 1)}{n} (1 - \mu^2) \\
 &+ A^{2n-2} \frac{n}{(n - 1)} (3 + \mu) (1 - \mu), \\
 D_{n22} \cdot Q_n &= -A^{2n+2} \frac{[2n + (1 + \mu)] [n^2(1 - \mu^2) + 8(1 + \mu)]}{n^2(n + 1) (1 - \mu)} - A^{4n} \frac{(3 + \mu)^2}{(n + 1)}, \\
 D_{n23} \cdot Q_n &\equiv D_{n32} \cdot Q_n = A^{4n} \frac{(3 + \mu) [2n - (1 + \mu)]}{n(n + 1)} + A^{2n+2} \frac{[n^2(1 - \mu^2) + 8(1 + \mu)]}{n(n + 1)} \\
 &+ A^{2n} \frac{(n - 1)}{n} (1 - \mu^2), \\
 D_{n24} \cdot Q_n &\equiv D_{n42} \cdot Q_n = A^{4n} \frac{(1 + \mu) (3 + \mu)}{n} + A^{2n} \frac{[2n + (1 + \mu)] (1 - \mu)}{n}, \\
 D_{n33} \cdot Q_n &= A^{4n} \frac{(3 + \mu) [2n - (1 + \mu)]}{(n + 1)} + A^{2n+2} \frac{[n^2(1 - \mu^2) + 8(1 + \mu)]}{(n + 1)} \\
 &+ A^{2n} 2(n - 1) (1 - \mu^2) - 2(3 + \mu) - A^{2n-2} (1 - \mu) [n(3 + \mu) - (1 + \mu)], \\
 D_{n34} \cdot Q_n &\equiv D_{n43} \cdot Q_n = -A^{2n} (1 - \mu)^2 - A^{2n-2} (1 - \mu^2), \\
 D_{n44} \cdot Q_n &= A^{4n} \frac{(1 - \mu) (3 + \mu)}{(n - 1)} - A^{2n-2} \frac{(1 - \mu) [2n + (1 + \mu)]}{(n - 1)}
 \end{aligned} \tag{51}$$

Mit (44), (45), (45a) und (45b) unter Verwendung von (46), (46a), (47), (47a), (48), (48a), (50) und (51) ist die Lösung des Problems in übersichtlicher Weise explizit gegeben und eignet sich in dieser Form gut zur allgemeinen numerischen Auswertung mit Hilfe elektronischer Rechengерäte.

Da die Darstellung von  $G_s$  gemäß (26) für den hier eingeschlagenen Lösungsweg von wesentlicher Bedeutung ist, wurde (26) numerisch untersucht. Mit

$$b = 100; \quad r = 75; \quad \varphi = 20^\circ; \quad \varrho = 15; \quad \psi = 15^\circ$$

ergeben sich nach (26), (26a), (26b) unter Berücksichtigung von (20), (22) und (24) die in Tabelle 1 angegebenen Werte:

Tabelle 1

$16 \pi K \cdot G_s(r, \varphi; \varrho, \psi)$ nach (4)	$N$	$16 \pi K \sum_{m=0}^N \Gamma_m(r; \varrho) \cdot \cos m(\varphi - \psi)$	$16 \pi K \cdot \Gamma_N(r; \varrho) \cdot \cos N(\varphi - \psi)$
	0	-3169,005	-3169,0052
	1	-2868,572	+ 300,43349
	2	-2827,361	+ 41,21046
	3	-2821,639	+ 5,72267
	4	-2820,834	+ 0,80489
	5	-2820,719	+ 0,11465
	6	-2820,702	+ 0,01653
	7	-2820,700	+ 0,00241
	8	-2820,700	+ 0,00035
	9	-2820,700	+ 0,00005
-2820,700	10	-2820,700	+ 0,00000



In Tabelle 2 sind die Werte von  $G_s$  nach (4) und (26) gegenübergestellt für

$b = 100 ; \quad r = 9 ; \quad \varphi = 15^\circ ; \quad \varrho = 90 ; \quad \psi = 80^\circ :$

Tabelle 2

$16 \pi K \cdot G_s(r, \varphi; \varrho, \psi)$ (nach 4)	$N$	$16 \pi K \sum_{m=0}^N \Gamma_m(r; \varrho) \cdot \cos m(\varphi - \psi)$	$16 \pi K \cdot \Gamma_N(r; \varrho) \cdot \cos N(\varphi - \psi)$
$\downarrow$ -1681,176	0	-1693,129	-1693,1287
	1	-1679,066	+ 14,06289
	2	-1680,929	- 1,86316
	3	-1681,174	- 0,24451
	4	-1681,177	- 0,00385
	5	-1681,176	+ 0,00159
	6	-1681,176	+ 0,00015
	7	-1681,176	- 0,00000

Für den Fall langsamster Konvergenz, wenn Aufpunkt und Lastpunkt zusammenfallen, sind die Ergebnisse aus (26) in Tabelle 3 angegeben. Mit

$b = 1 ; \quad r = \varrho = 0,6 ; \quad \varphi = \psi = 30^\circ$

ergibt sich:

Tabelle 3

$16 \pi K \cdot G_s(\varrho, \psi; \varrho, \psi)$ (nach 4)	$N$	$16 \pi K \sum_{m=0}^N \Gamma_m(\varrho; \varrho)$	$16 \pi K \cdot \Gamma_N(\varrho; \varrho)$
$\downarrow$ 0,000000	0	-0,274789	-0,27478888
	10	-0,006544	+0,00145082
	20	-0,001714	+0,00018045
	30	-0,000774	+0,00005339
	80	-0,000111	+0,00000281
	100	-0,000071	+0,00000144
	150	-0,000032	+0,00000043
	250	-0,000011	+0,00000009
	300	-0,000008	+0,00000005
	500	-0,000003	+0,00000001
	600	-0,000002	+0,00000000

Zur Ermittlung von Durchbiegungslinien berechnet man  $G_s$  zweckmäßig nach (45a). Dann ist die Güte der Konvergenz von (45b) entscheidend. Bei der Durchrechnung von Beispielen hat sich gezeigt, daß etwa nach acht Gliedern ( $N = 8$ )  $G_0$  bzw.  $H_0$  überall mit einer Genauigkeit von mehr als 1% dargestellt wird.

Für die Berechnung von Durchbiegungslinien einer Kreisringplatte wurden folgende Werte angenommen:

$b = 1 ; \quad a = 0,5 ; \quad \mu = 0,3 ; \quad \varrho = 0,6 ; \quad \psi = 30^\circ ; \quad N = 15 .$

Normiert man die Plattensteifigkeit  $K$  aus (4a) zu 1, so erhält man für die Hauptdurchbiegungslinie  $\varphi = 30^\circ = \text{const.}$  bzw.  $\varphi = 210^\circ = \text{const.}$  die in Tabelle 4 angegebenen und in Bild 5 dargestellten Werte.

Tabelle 4

		$r$	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1,0
$\varphi = 30^\circ$	- $G_s$ nach (26)		0,0196	0,0070	0,0015	0,0069	0,0178	0,0293	0,0383	0,0421	0,0385	0,0252	0,000
	- $G_s$ mit (45a)		0,0195	0,0065	0,0000	0,0063	0,0176	0,0292	0,0382	0,0421	0,0385	0,0252	0,000
	$G_0$ mit (45b)		1,8567	1,6657	1,4843	1,3078	1,1331	0,9575	0,7790	0,5957	0,4059	0,2079	0,000
	$G$ nach (44)		1,837	1,659	1,484	1,302	1,116	0,928	0,741	0,554	0,367	0,183	0,000
$\varphi = 120^\circ$	- $G_s$ nach (26)		0,2022	0,1924	0,1803	0,1659	0,1492	0,1303	0,1089	0,0853	0,0592	0,0308	0,000
	- $G_s$ mit (45a)		0,2021	0,1923	0,1802	0,1659	0,1492	0,1302	0,1089	0,0852	0,0592	0,0308	0,000
	$G_0$ mit (45b)		1,0536	0,9513	0,8487	0,7457	0,6420	0,5375	0,4322	0,3258	0,2183	0,1098	0,000
	$G$ nach (44)		0,852	0,759	0,669	0,580	0,493	0,407	0,323	0,241	0,159	0,079	0,000

Mit denselben Eingangsgrößen wie jene, die der Tabelle 4 zugrunde liegen, sind die Durchbiegungen des Innenrandes  $r = a = 0,5$  ermittelt, in Tabelle 5 zusammengestellt und in Bild 6 aufgetragen worden.

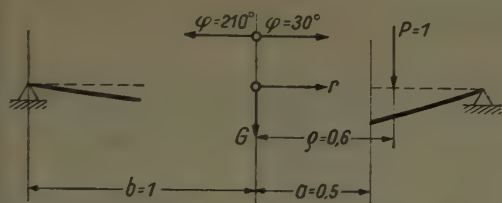


Bild 5. Hauptdurchbiegungslinie einer Kreisringplatte mit Einzellast und  $\mu = 0,3$ ,  $K = 1$

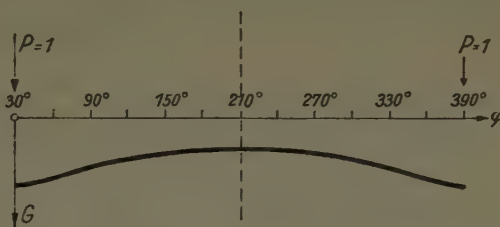


Bild 6. Durchbiegungslinie des Innenrandes  $r = a = 0,5$  der durch Einzellast belasteten Kreisringplatte

Tabelle 5

$\varphi$	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
G nach (44)	1,837	1,633	1,345	1,120	0,968	0,880	0,852	0,880	0,968	1,120	1,345	1,633

Die numerischen Untersuchungen haben gezeigt, daß das Problem der durch eine Einzellast belasteten dünnen Kreisringplatte mit den hier abgeleiteten Formeln bei Berücksichtigung von etwa 8 bis 10 Reihengliedern mit hinreichender Genauigkeit behandelt werden kann.

## 6. Abschlußbemerkung

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß  $G$  in der Form (28) mit (28a) bei Anwendung der Entwicklungsformel (8) sehr geeignet erscheint, jeden Belastungsfall von Kreisringplatten durch Integration zu lösen. Darüber hinaus kann man mit Hilfe der GREENSchen Funktion Teilplatten- z. B. Halbplattenprobleme berechnen, indem man auf dem nicht betrachteten Teil einer Vollkreisplatte Einzellasten anbringt und ihre Größe daraus bestimmt, daß die Randbedingungen an den Teilfugen der Halbplatte möglichst gut befriedigt werden. Nach dieser Methode wurde das Problem der außen frei aufgelagerten Halbkreisringplatte mit sonst freien Rändern bereits erfolgreich behandelt, und eine Veröffentlichung ist geplant.

## Literatur

- [1] I. SZABÓ, Höhere Technische Mechanik, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956, Springer-Verlag, S. 167ff.
- [2] A. CLEBSCH, Theorie der Elastizität fester Körper, Leipzig 1862, S. 327. Wieder abgedruckt in: Théorie de l'élasticité des corps solides de Clebsch, traduite par B. DE ST. VENANT et FLAMANT, Paris 1883, S. 763ff.
- [3] A. FÖPPL, Die Biegung einer kreisförmigen Platte, Ber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. (1912), S. 155. „Drang und Zwang“, 2. Teil. München 1941.
- [4] A. NADAI, Elastische Platten, Berlin 1925, S. 19ff. und 190ff.
- [5] J. H. MICHEL, Math. Soc. Proc. (1902), S. 182.
- [6] E. MELAN, Eisenbau (1919), S. 190.
- [7] W. MÜLLER, Die Durchbiegung einer Kreisplatte unter exentrisch angeordneten Lasten, Ing.-Archiv 13 (1943), S. 355.
- [8] E. REISSNER, Über die Biegung der Kreisplatte mit exentrischer Einzellast, Math. Ann. 111 (1935), S. 177.
- [9] KH. NASITTA, Über die Dimensionierung dünner Kreisplatten unter exentrisch aufgetragenen Einzellasten, Ing.-Archiv, 23 (1955), S. 85.
- [10] E. REISSNER, Über die unsymmetrische Biegung dünner Kreisringplatten, Ing.-Archiv 1 (1929), S. 72ff.
- [11] K. GIBKMAN, Flächentragwerke, 3. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1954, Springer-Verlag, S. 162ff., S. 167 und S. 254.
- [12] M. LAGALLY, Vorlesungen über Vektorrechnung, 4. Aufl., Leipzig 1949, Akad. Verl.-Ges. Geest & Portig KG., S. 152, Formel (76a).
- [13] R. COURANT, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, 1. Band, 2. Aufl., Berlin 1930, Springer-Verlag, S. 88, S. 374 und S. 362.
- [14] G. KIRCHHOFF, Vorlesungen über mathematische Physik, 27. Vorlesung, Leipzig 1897, Teubner Verlag, S. 388ff. und L. LIECHTENSTEIN, Das Hauptproblem der Elastizitätstheorie, Math. Z. 20 (1924), s. auch K. FRIEDRICH, Ann. of Math. 48 (1947), S. 441—471.
- [15] Hütte I, 28. Aufl. 1. Abschnitt: I. SZABÓ, Mathematik Berlin 1955, Wilhelm Ernst und Sohn, S. 117.

Manuskripteingang: 21. 3. 1960

Anschrift: Priv.-Doz. Dr. KH. NASITTA, Institut für Mechanik, Technische Universität Berlin, Berlin-Charlottenburg 2, Hardenbergstraße 34



# Laminar Non-Newtonian Flow in an Annulus with Porous Walls<sup>\*)</sup>

By M. N. L. NARASIMHAN

*Das Problem der Strömung gewisser nicht-Newton'scher Flüssigkeiten in einem porös-wandigem Ring wird mittels Einführung von Gliedern zweiter Ordnung in die Geschwindigkeitsrelationen für Spannung—Dehnung der klassischen Hydrodynamik behandelt. Für den Fall, daß die Radialkomponente der Strömung gewissen Bedingungen genügt, wird gezeigt, daß sich eine exakte Lösung der Navier-Stokes'schen Gleichungen erzielen läßt, durch welche die stationäre Strömung einer nicht-Newton'schen Flüssigkeit in einem porös-wandigem Ring beschrieben wird. Die Wirkung derartiger Bedingungen für die radiale Strömung auf die Eigenschaften des Strömungsfeldes werden untersucht. In analoger Weise wird auch das Problem einer nicht-Newton'schen Strömung zwischen porösen Platten gelöst. Es wird gezeigt, daß die Lösung dieses Problems auch als Grenzfall aus der Lösung des Ringproblems erhalten werden kann.*

*The problem of flow of certain non-Newtonian liquids in an annulus with porous walls is discussed by introducing second order terms in the stress-strain velocity relations of classical hydrodynamics. When certain restrictions are applied to the radial component of flow, it is shown that it is possible to obtain an exact solution to the Navier-Stokes equations describing the steady-state flow of a non-Newtonian fluid in an annulus with porous walls. The effects of such restricted radial flows on the characteristics of the flow field have been examined. Further, the problem of non-Newtonian flow between porous plates has been solved in a procedure analogous to that used for the annulus. It is shown that the solution of the porous plate problem could also be obtained as the limiting form of the solution for the annulus problem.*

Вопрос течения некоторых неютоновских жидкостей через кольцо с пористыми стенками рассматривается путём введения в соотношения классической гидродинамики, связывающие давление-растяжение со скоростью, членов второго порядка. В предположении некоторых ограничений для радиальной составляющей течения показывается, что можно получить точное решение уравнений Навье-Стокса, описывающих установившееся течение неютоновской жидкости через кольцо с пористыми стенками. Рассматриваются влияния таких ограниченных радиальных течений а также характеристические свойства поля течения. Далее решается вопрос неютоновского течения между пористыми пластинками. Применяемые при этом приёмы аналогичны методам, используемым для случая кольца. Показывается, что решение для пористой пластинки может быть получено как предельный случай решения для кольца.

## Introduction

In recent years, flow through channels with porous walls has been gaining an increasing importance both in technological and biophysical fields. Much work has been done with an effort to understand the effects of fluid removal or injection through channel walls on the flow of a classical viscous fluid. BERMAN (1953) made an initial effort in this direction. His investigations provided a technique for solving the classical viscous flow equations. Further contributions have been made since then by SELLARS (1955), YUAN (1956), YUAN and FINKELSTEIN (1956), BERMAN (1956) and MORDUCHOW (1957). All these investigations concerning the flow of classical viscous fluids in an annulus with porous walls, have dealt with approximation methods for obtaining solutions valid for different restricted ranges of fluid suction and injection at the walls of pipes and rectangular channels. Later, in 1957, BERMAN (1957), gave a method for obtaining the exact solutions of the steady-state problem of laminar flow of an incompressible viscous fluid in an annulus with porous walls by placing some restrictions on the crossflow rates. These workers have thus confined themselves to the classical viscous fluid flow only. But no work has been done so far on non-Newtonian flow in an annulus with porous walls.

The present investigation is concerned with the problem of steady-state laminar flow of a non-Newtonian liquid in an annulus with porous walls and is carried out by introducing second order terms of the type  $d_{\alpha}^i d_j^{\alpha}$  (where  $d_j^{\alpha}$  is the strain-velocity tensor) into the stress-strain relations of the classical hydrodynamics. It is assumed in our case also that the fluid injection rate at one wall is taken equal to the fluid withdrawal rate at the other wall of the annulus. With this restriction it is found possible to obtain an exact solution of the NAVIER-STOKES equations, which is valid for all values of the cross flow in the non-Newtonian case also.

Thus, the effect of variations in the cross flow velocity on the flow field can be examined in detail near the injection and suction walls. It is found as a result of the present investigations that the non-Newtonian flow characteristics in an annulus with porous walls are similar in some respects to those of the classical viscous flow under similar conditions. But certain dissimilarities have also been found to exist between NEWTONIAN and non-NEWTONIAN flows in an annulus with porous walls particularly in two cases, namely, in the behaviour of the velocity field for extreme variations of cross flow and secondly in the behaviour of the pressure field when

<sup>\*)</sup> Read at the UNESCO Symposium on 'Non-linear Physical Problems' and the 5th Congress on Theoretical and Applied Mechanics between December 21st, and December 26th, 1959, Roorkee (India).

the direction of the cross flow changes. Next, by varying the radius ratio of the annulus, the effect of geometry changes on the solution has been studied in the present problem. Furthermore, this problem has been extended to the case of non-Newtonian flow between two porous plates also. Finally it has been demonstrated in this paper, that the solution for the porous plate problem could be obtained as a special case of the annulus problem.

### SYMBOLS USED

$a$ = radius of the outer pipe of the annulus.	$v_w$ = the cross flow velocity in the flat plate problem
$b$ = radius of the inner pipe of the annulus.	$x$ = the axial or longitudinal coordinate in the annulus and flat plate problems, respectively.
$g(\sigma, R)$ = axial pressure function defined by Equation (21).	$y$ = the cross flow coordinate for the flat plate problem.
$p$ = pressure	$\zeta$ = a dimensionless distance parameter equal to $(\lambda - \sigma)/(1 - \sigma)$ for the annulus and $(y/h)$ for the flat plate problem.
$r$ = the radial coordinate for the annulus.	$\lambda$ = a dimensionless distance parameter equal to $(r/a)$ for the annulus.
$h$ = the spacing between the porous flat plates.	$\mu$ = the fluid viscosity coefficient.
$N_{Re}$ = the Reynolds number for the longitudinal flow in the porous plate problem; $h \bar{u}/\nu$ .	$\mu_1$ = the coefficient of cross-viscosity of the fluid.
$R$ = the Reynolds number for the cross flow; $h v_w/\nu$ for the porous plate problem and $a V_a/\nu$ for the annulus problem.	$\rho$ = the fluid density.
$u$ = the axial or longitudinal component of velocity in the annulus or flat plate problems, respectively.	$\sigma$ = the radius ratio of the annulus = $b/a$ ; $0 < \sigma < 1$
$\bar{u}$ = the average axial or longitudinal velocity in the annulus or flat plate problems respectively.	$\nu$ = the kinematic coefficient of viscosity.
$v_a, v_b$ = the cross flow velocities at the outer and inner walls of the annulus respectively.	$\nu_1$ = the kinematic coefficient of cross-viscosity.
	$k$ = a parameter = $2 \nu_1/a^2$ .

### Solution of the flow equations for the annulus problem

Non-Newtonian liquids such as blood, thick oils, paints, colloidal suspensions and high polymer solutions like polyisobutylene solution are highly viscous liquids. They exhibit certain type of phenomena which cannot be described by the stress-strain relations of the classical hydrodynamics. The rheological behaviour of the non-Newtonian liquids can be adequately studied by generalizing the stress-strain velocity relations of the classical hydrodynamics in the manner suggested by RIVLIN (1948) and REINER (1952). This generalization is effected by introducing second order terms of the type  $d_\alpha^i d_j^\alpha$  (where  $d_j^i$  is the rate of deformation tensor) in the classical stress-strain relations. We obtain the non-linear stress-strain velocity relations in the form (RIVLIN (1948))

$$t_j^i = -p \delta_j^i + F_1 d_j^i + F_2 d_\alpha^i d_j^\alpha \dots \dots \dots (1),$$

where the coefficients  $F_1$  and  $F_2$  are in general functions of material invariants. But in our problem we restrict ourselves only to cases where  $F_1$  and  $F_2$  are constants known as the coefficients of viscosity and cross viscosity respectively.  $p$  is the pressure of the liquid.

The equations of conservation of momentum are the well known EULERIAN hydrodynamical equations (Tensor Analysis, Theory and Applications by I. S. SOKOLNIKOFF, 1956 pp 290—325 John Wiley and sons, Inc. Newyork) and are written as

$$\rho \left( \frac{\partial v^i}{\partial t} + v_{,j}^i v^j \right) = t_{,j}^{i,j} + \rho f^i \dots \dots \dots (2),$$

where the acceleration terms are written following the motion of the fluid.  $v_{,j}^i$  indicates the covariant derivative of the velocity vector  $v^i$  with respect to a coordinate  $x^j$  and  $f^i$  is the body force per unit mass,  $\rho$  is the density of the liquid.  $t_{,j}^{i,j}$  is the covariant derivative or the rate of stress with respect to the space coordinates  $x^j$  and summed over the index  $j$ .

The equation of conservation of mass is written using the continuity condition that the time rate of change of mass of fluid contained in a given region is equal to the excess of the mass flow out of the region over the mass flow into the region. Thus we have the equation of continuity in the form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^i)_{,i} = 0 \dots \dots \dots (3).$$

Let us consider the laminar steady-state flow of a non-Newtonian liquid in the region bounded by the porous walls of two concentric tubes of radii  $a$  and  $b$ . We assume that the rate of fluid withdrawal at one wall of the annulus is always equal to the rate of injection of fluid at the other wall and that these rates are independent of axial position in the tube.



We assume that the body forces are absent and we select a cylindrical polar coordinate system with the  $x$ -axis along the tube axis and define a dimensionless radial parameter  $\lambda = r/a$  where  $a$  is the larger of the two tube radii. The equations of motion and continuity eqs. (1), (2) and (3) become after introducing  $\lambda$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \lambda} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right] + \nu_1 \left[ \frac{2v}{a \lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \\ \left. + \frac{2v}{a^2 \lambda^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2}{a^2} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda \partial x} - \frac{2v}{a^3 \lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{2v}{a^3 \lambda^3} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{2}{a^2 \lambda} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ \left. - \frac{2}{a^2 \lambda} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{a} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda \partial x} + \frac{2}{a} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] \quad (4),$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} = -\frac{1}{a \rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda v) \right\} \right] + \nu_1 \left[ \frac{8}{a^3} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda^2} + \frac{2}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda \partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{2v}{a^3 \lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda^2} - \frac{6v^2}{a^3 \lambda^3} + \frac{2v}{a^3 \lambda^2} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{4}{a^3 \lambda} \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right)^2 - \frac{1}{a \lambda} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{2v}{a \lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^3 \lambda} \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{2}{a^2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda^2} + \frac{2}{a^2} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \lambda} + \frac{2}{a^3} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \right] \quad (5),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda u) + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda v) = 0 \quad (6).$$

The range of the variable  $\lambda$  is  $b/a \leq \lambda \leq 1$  (7).

The  $x$  component of the velocity is  $u$ ,  $v$  is the radial velocity component,  $p$  is the pressure,  $\rho$  the density,  $\nu$  the kinematic viscosity and  $\nu_1$  the kinematic cross-viscosity.

The condition, that the suction rate at one wall be equal to the injection rate at the other wall, is satisfied if

$$b v_b = a v_a \quad (8),$$

where  $v_b$  and  $v_a$  are the radial velocities at the walls of the smaller tube and larger tube respectively. Further, because of this restriction on the cross-flow, the axial velocity component,  $u$  does not depend on  $x$ . The continuity equation (6) and equation (8) then give

$$v(\lambda) = \frac{v_a}{\lambda} = \frac{\sigma v_b}{\lambda} \quad (9),$$

where  $\sigma = \frac{b}{a}$  is the radius ratio.

If one uses these results, the first equation of motion, eq. (4) is reduced to

$$\frac{a^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = u'' \left[ 1 - \frac{2\nu_1}{a^2} \frac{R}{\lambda^2} \right] - \frac{u'}{\lambda} \left[ (R-1) - \frac{2\nu_1}{a^2} \frac{R}{\lambda^2} \right] \quad (10),$$

where  $\mu$  = fluid viscosity, and  $\nu_1$  = kinematic cross-viscosity; the primes denote differentiation with respect to  $\lambda$ , and the cross-flow Reynolds number  $R$  is defined by

$$R = a v_a / \nu \quad (11).$$

The second equation of motion, eq. (5) reduces to

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda} = \frac{\rho v_a^2}{\lambda^3} + \mu_1 \left[ \frac{-16 v_a^2}{a^2 \lambda^5} + \frac{1}{a^2 \lambda} u'^2 + \frac{2}{a^2} u' u'' \right] \quad (12),$$

where  $\mu_1$  is the coefficient of cross viscosity.

From eq. (12) it is clear that

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial \lambda} = 0.$$

Hence if one sets

$$\frac{a^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = c \quad (13),$$

eq. (10) becomes

$$u'' (\lambda^2 - K R) - \frac{u'}{\lambda} [\lambda^2 (R-1) - K R] = c \lambda^2 \quad (14),$$

after replacing  $2\nu_1/a^2$  by  $K$ .

The boundary conditions to be satisfied are

$$u(1) = u(\sigma) = 0 \quad \dots \dots \dots (15).$$

Eq. (14) can be integrated twice and after the boundary conditions eq. (15) are satisfied, we obtain the solution

$$u = \frac{-c}{2(2-R)} \left[ (1-\lambda^2) - (1-\sigma^2) \left\{ \frac{(1-KR)^{R/2} - (\lambda^2 - KR)^{R/2}}{(1-KR)^{R/2} - (\sigma^2 - KR)^{R/2}} \right\} \right] \quad \dots \dots (16).$$

The average axial velocity in the annulus is obtained by integration. Thus,

$$\bar{u} = \frac{2}{1-\sigma^2} \int_{\sigma}^1 \lambda u \, d\lambda \quad \dots \dots \dots (17).$$

If one averages eq. (16), the relationship between  $c$  and  $\bar{u}$  is found to be

$$\bar{u} = \frac{-c}{2(2+R)(2-R)} \left[ \frac{(2+R) + \sigma^2(2-R)}{2} - \frac{R(1-\sigma^2)(1-KR)^{R/2}}{\{(1-KR)^{R/2} - (\sigma^2 - KR)^{R/2}\}} - 2KR \right] \quad (18).$$

The axial velocity component is then given, in terms of the average velocity by

$$\frac{u(\lambda)}{\bar{u}} = 2(R+2) \times \frac{(1-\lambda^2) \{ (1-KR)^{R/2} - (\sigma^2 - KR)^{R/2} \} - (1-\sigma^2) \{ (1-KR)^{R/2} - (\lambda^2 - KR)^{R/2} \}}{2(1+\sigma^2) \{ (1-KR)^{R/2} - (\sigma^2 - KR)^{R/2} \} - R(1-\sigma^2) \{ (1-KR)^{R/2} + (\sigma^2 - KR)^{R/2} \} - 4KR \{ (1-KR)^{R/2} - (\sigma^2 - KR)^{R/2} \}} \quad (19).$$

The velocity field is now fully defined by Eq. (9) for the radial component and eq. (19) for the axial component.

The pressure field can be described after integration of eqs. (12) and (13). One obtains, after some rearrangement of terms,

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{p(x, 1) - p(x, \lambda)}{(\rho v_a^2/2)} \right\} &= \left( \frac{1}{\lambda^2} - 1 \right) - \frac{8\nu_1}{a^2} \left( \frac{1}{\lambda^4} - 1 \right) \\ &+ \frac{Kc^2}{v_a^2(2-R)^2} \left\{ \frac{3}{2} (1-\lambda^2) + \frac{R^2}{8D^2(R-1)} [(1-KR)^{R-1} - (\lambda^2 - KR)^{R-1}] \right. \\ &\quad + 2(R-1)(1-KR)^{R-2} - 2(R-1)\lambda^2(\lambda^2 - KR)^{R-2} \\ &\quad - \frac{(1-\sigma^2)}{D} [(1-KR)^{R/2} - (\lambda^2 - KR)^{R/2} + R(1-KR)^{R/2-1} \\ &\quad \left. - R\lambda^2(\lambda^2 - KR)^{R/2-1}] \right\} \quad \dots \dots \dots (20), \end{aligned}$$

where

$$D = \{(1-KR)^{R/2} - (\sigma^2 - KR)^{R/2}\}.$$

Thus, radial pressure variation is given by eq. (20). For the axial pressure variation, by integrating eq. (13), we obtain,

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{p(0, \lambda) - p(x, \lambda)}{(\rho \bar{u}^2/2)} \right\} &\left( \frac{\bar{u}a}{8\nu} \right) \left( \frac{a}{x} \right) \\ &= \frac{(4-R^2) \{ (1-KR)^{R/2} - (\sigma^2 - KR)^{R/2} \}}{2(1+\sigma^2) [(1-KR)^{R/2} - (\sigma^2 - KR)^{R/2}] - R(1-\sigma^2) [(1-KR)^{R/2} + (\sigma^2 - KR)^{R/2}] - 4KR [(1-KR)^{R/2} - (\sigma^2 - KR)^{R/2}]} \\ &= g(\sigma, R) \quad \dots \dots \dots (21). \end{aligned}$$

This completes the solution of the equations of motion for the non-Newtonian case. The results apply equally well for either direction of cross flow in the annulus. Positive values of  $R$ ,  $v_a$  and  $v_b$  represent suction at the outer wall of the annulus and injection at the inner wall, while the negative values of these parameters give the solution for injection at the outer and suction at the inner wall. It may also be noted that BERMAN's (1957) solution for the classical viscous flow case can be obtained as a particular case from our eqs. (9), (19), (20) and (21) by putting  $\nu_1 = 0$ .



### Velocity Components

The radial component of velocity, given by eq. (9), is seen to vary in a particularly simple way with radial position and becomes more nearly constant as the radius ratio approaches unity.

The behaviour of the axial component of velocity, given by eq. (19) is of considerably greater interest.

In the absence of cross-flow,  $R = 0$ , the axial velocity becomes

$$\frac{u(\lambda)}{\bar{u}} = 2 \frac{(1 - \lambda^2) \ln \sigma - (1 - \sigma^2) \ln \lambda}{(1 + \sigma^2) \ln \sigma + (1 - \sigma^2)} \quad \dots \dots \dots (22),$$

as can be seen by examining the limit of eq. (19) as  $R$  approaches zero. eq. (22) does not involve any term containing cross viscosity. Hence eq. (22) is the same as would be obtained in the classical viscous flow case also. Thus for the solid wall annulus  $u(\lambda)/\bar{u}$  is the same whether we consider the non-Newtonian liquid or the classical viscous liquid. eq. (22) is the usual expression for the velocity profile in a solid wall annulus. (See for example, eq. (53), J. A. KNUDSEN and D. L. KATZ, Fluid Dynamics and Heat Transfer, Engineering Research Institute, University of Michigan, 1954, p 43). This profile is not symmetrical and the maximum velocity occurs closer to the inner wall of the annulus. For the annulus with porous walls, a cross flow characterized by  $R = 1$  (injection at the inner wall and suction at the outer wall) leads to a non-symmetrical profile regardless of the radius ratio of the annulus in the non-Newtonian case. This is in contrast with the symmetrical parabolic profile which results for  $R = 1$  in the case of classical viscous fluid flowing in an annulus with porous walls.

Another property of the axial velocity component may be seen by reference to Fig. 1 where velocity profiles have been plotted for various cross flows making use of a normalized radial distance parameter defined as  $\zeta = \frac{\lambda - \sigma}{1 - \sigma}$ . For the particular values of  $\sigma$  and  $K$  chosen,  $\sigma = 0.2$  and  $K = \frac{1}{5} \sigma^2$ , inflexion points appear in the profiles  $R \geq 1$ . Note that for negative  $R$  the profile changes which occur are such that an inflexion point does not appear. Since the presence of an inflexion point is of importance in flow stability considerations, the conditions required to produce an inflexion point have been determined.

The second derivative of the axial velocity component obtained by differentiation of eq. (19) is set equal to zero. This leads to the following equation for the position of the inflexion point.

$$(\lambda^2 - K R)^{R/2-2} [\lambda^2 (R - 1) - K R] = \frac{2}{R(1 - \sigma^2)} [(1 - K R)^{R/2} - (\sigma^2 - K R)^{R/2}] \quad (23),$$

and  $\sigma \leq \lambda_i \leq 1$ .

This equation can be numerically solved for any case to obtain the position of the inflexion point. For example for  $K = \frac{1}{5} \sigma^2$ ,  $\sigma = 0.2$  and  $R = 1$ , the value of  $\lambda = 0.2704$  or  $\zeta = 0.09$  which gives the position of the inflexion point in the velocity profile for  $R = 1$ .

For a given  $R$ , the critical value of  $\sigma$  is that one for which the inflexion point first appears at  $\lambda = \sigma$ . Thus the critical value of  $\sigma$  is given by the solution of the algebraic equation

$$(\sigma^2 - K R)^{R/2-2} [\sigma^2 (R - 1) - K R] = \frac{2}{R(1 - \sigma^2)} [(1 - K R)^{R/2} - (\sigma^2 - K R)^{R/2}] \quad (24).$$

This equation has been solved for several values of  $R$ , taking  $K = 1/125$  to give the corresponding critical values of  $\sigma$ . The results are given in Table I and Fig. 2.

Table I  
Critical values of  $\sigma$  and  $R$  for an inflexion point profile

$R$	1	3	5	10	18	30	50	80	100
$\sigma$	0.1747	0.3522	0.520	0.6857	0.7964	0.8730	0.9212	0.9768	0.9813

For a given value of  $\sigma$  the inflexion point appears at  $\lambda = \sigma$  when the cross flow REYNOLDS number,  $R$  is the critical one given in Table I or Fig. 2.

Note that, as the radius ratio approaches unity, the cross flow required to produce the inflexion point profile becomes very large. With regard to this phenomena, the non-Newtonian liquid behaves like the classical viscous liquid.

One further aspect of the axial velocity component behaviour should be mentioned. It may be seen by reference to Fig. 1, that the velocity profiles for  $R = +\infty$  and  $R = -\infty$ , coincide. This can be deduced also by examining the limit of eq. (19) as  $R$  tends to  $+\infty$  and also as  $R$  tends to  $-\infty$ . The limits are found to be the same.

When fluid is injected at the outer wall and removed at the inner wall (that is for  $R$  negative) the velocity profiles (of the axial component of velocity) become more asymmetrical as the cross flow velocities increase. For higher cross flow velocities the maximum velocity occurs at a point closer to the inner annulus wall.

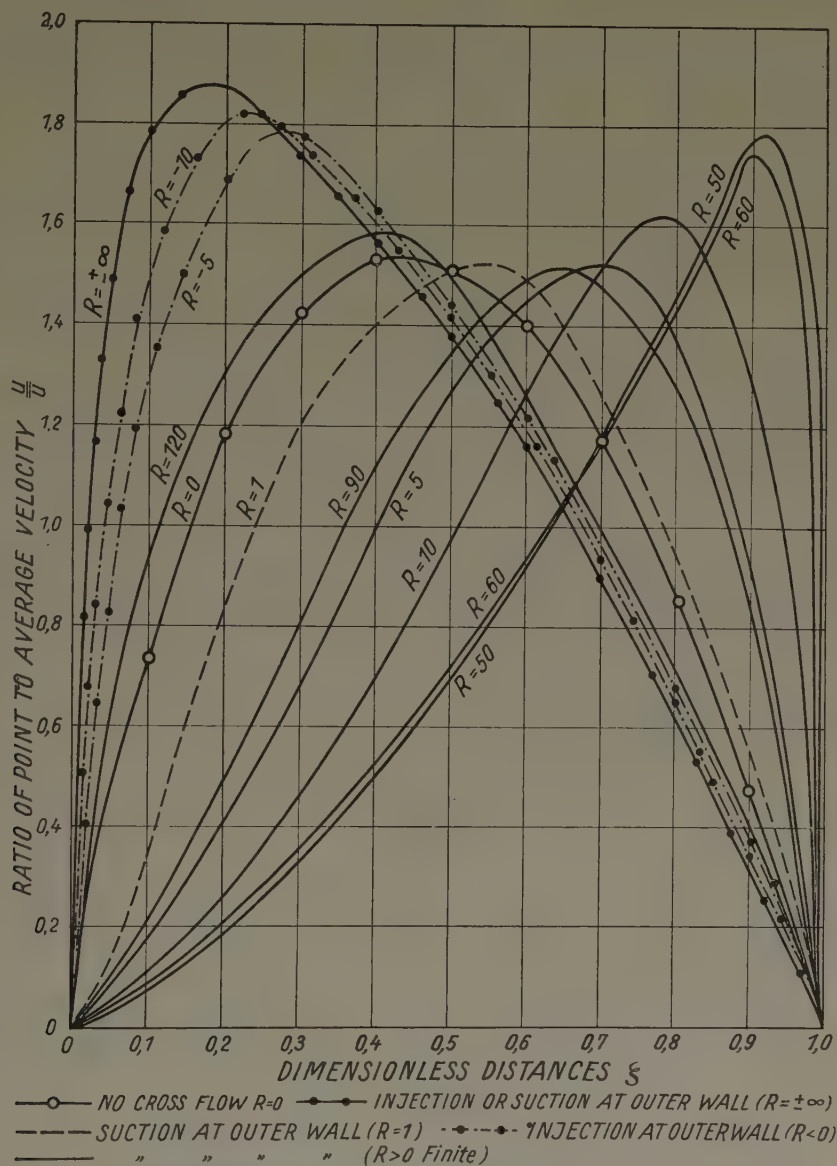


Fig. 1. Annulus axial velocity Profiles for various cross-flows ( $\sigma = 0.2$ )

For fluid injection at the inner wall and removal at the outer wall (that is for  $R$  positive) the velocity profiles also become more asymmetrical as the cross flow velocities increase. By a reference to Fig. 1, it becomes clear for the particular case  $\sigma = 0.2$  and  $K = \frac{1}{5} \sigma^2$ , that at first, up to  $R = 50$  the maximum velocity occurs at a point closer to the outer annulus wall. But for  $R > 50$ , the point at which the maximum velocity occurs, recedes and moves closer and closer towards the inner annulus wall, and ultimately, when  $R$  approaches  $+\infty$  the maximum velocity point coincides with that when  $R$  approaches  $-\infty$ , its position being close to the inner annulus wall. Again by a reference to Fig. 1, it becomes clear that the velocity profiles for large



positive  $R$ , which lie on the left of the profile corresponding to  $R = 0$  are such that an inflexion point does not occur. Thus the behaviour of the non-Newtonian liquid is dissimilar to the classical viscous liquid in the case when  $R$  is large and positive. And also by examination of the first derivative of the expression for the axial velocity component and as shown in Fig. 1, the slope of the velocity profile approaches a finite limit at the walls as  $R$  approaches  $\pm \infty$ .

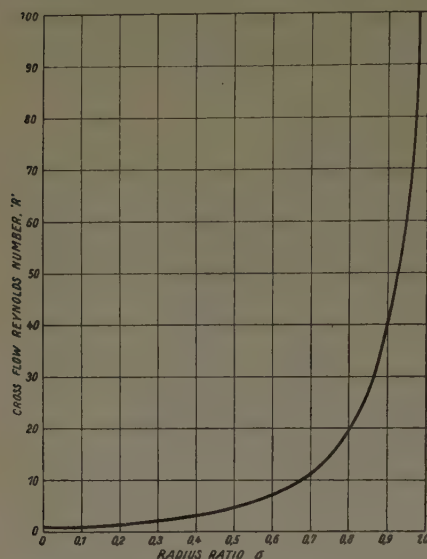


Fig. 2. Critical suction REYNOLDS number as a function of the annulus radius ratio

It is clear from Fig. 3, that for the same average axial velocity the axial pressure drop per unit length, when cross flow is present, is greater than that for a solid wall annulus and the difference becomes much more exaggerated as the radius ratio of the annulus decreases which is also the case with classical viscous liquids. Further in the non-Newtonian case this difference

### Pressure Field

The radial pressure variation is given by eq. (20). It is clear from this equation that the radial pressure variation depends upon the direction of the cross flow since the values of this variation will be different for  $R$  positive and  $R$  negative, as can be seen from eq. (20). In this respect also the non-Newtonian liquid is dissimilar in behaviour to the classical viscous liquid.

The axial pressure described by eq. (21), always drops in the direction of the cross flow. This can be shown by noting that, in the domain described by

$$-\infty \leq R \leq +\infty, \quad 0 < \sigma < 1$$

the right side of eq. (21), called  $g(\sigma, R)$  for convenience, has no zeros on the  $R$  axis for any value of  $\sigma$  and is positive for some value of  $R$  and  $\sigma$ .

Figure 3 gives the ratio of the axial pressure drop for an annulus with cross flow to that for a solid wall annulus as a function of the cross flow REYNOLDS number,  $R$ , for constant average axial velocity. Curves are given for various values of the annulus radius ratio  $\sigma$ .

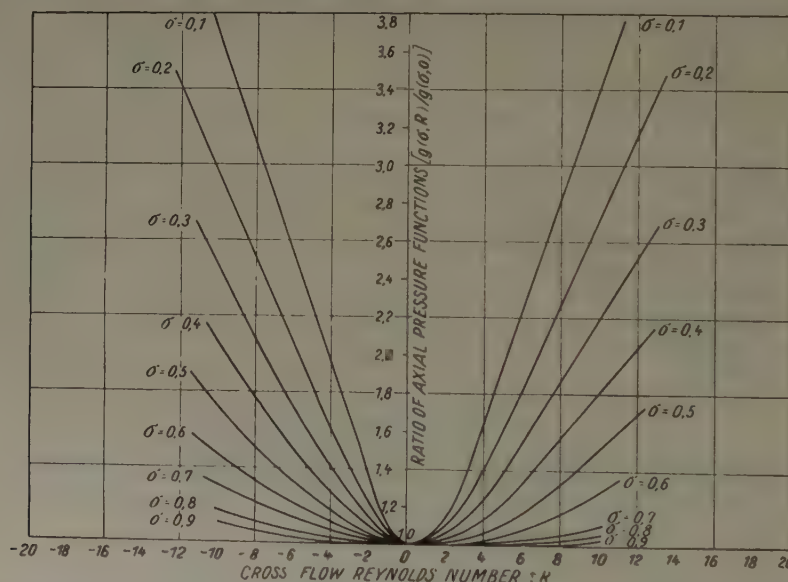


Fig. 3. Ratio of the axial pressure function with crossflow to the axial pressure function in a solid wall annulus  
Note: These curves give the ratio of the axial pressure drop per unit length with crossflow to that without crossflow if the average axial velocity is considered constant in this comparison

is found to become much more pronounced while  $R$  is negative than when  $R$  is positive, since in Fig. 3 the curves for  $R$  negative, are steeper than the corresponding ones for  $R$  positive. In this respect the non-Newtonian liquid differs from the classical viscous liquid.

### Non-Newtonian flow between two porous flat plates

The exact solution for the steady-state two-dimensional laminar non-Newtonian flow between porous flat plates can be obtained by a procedure analogous to that used for the annulus.

The equations of non-Newtonian hydrodynamics in cartesian coordinate system for this problem become:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \nu_1 \left[ 4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (25),$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \nu_1 \left[ 4 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (26),$$

where  $F_1$  and  $F_2$  are taken as  $2\mu$  and  $2\mu_1$  respectively in eq. (2).  $x$ -axis is taken parallel to the plates, the origin lying on the lower plate and  $y$  — axis is taken perpendicular to the plates,  $u$  and  $v$  are components of velocity parallel to the plates and transverse to the plates respectively.

Equation of continuity is

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots \dots \dots (27).$$

Let  $\zeta = y/h$  a non-dimensional distance parameter where  $h$  is the distance between the plates. In this problem also we make the same assumption as that of the annulus flow problem namely, the rate of fluid injection at one plate is equal to the rate of suction at another plate and is independent of the position.

$$\text{Hence } v = v_w, \text{ a constant } \dots \dots \dots (28).$$

On account of Eq. (27) and Eq. (28), we have  $u$  a function of  $y$  only. Hence eq. (25) and eq. (26) reduce to

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{\rho v_w h}{\mu} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots \dots \dots (29),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = \frac{h^2}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \quad \dots \dots \dots (30).$$

We now define  $R$ , the cross flow REYNOLDS number for this problem as follows:

$$R = \frac{\rho v_w h}{\mu} \quad \dots \dots \dots (31).$$

From eq. (30) it follows that  $\frac{\partial p}{\partial \zeta}$  is a function of  $\zeta$  only. Hence we have

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial \zeta} = 0 \quad \dots \dots \dots (32).$$

From eq. (29) it follows therefore that

$$\frac{h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = c \quad \dots \dots \dots (33),$$

where  $c$  is a constant.

Now equations (29) and (30) reduce to

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - R \frac{\partial u}{\partial \zeta} = c \quad \dots \dots \dots (34),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = \frac{h^2}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \quad \dots \dots \dots (35).$$

The boundary conditions for  $u(\zeta)$  for this problem are

$$u(0) = 0 \quad \dots \dots \dots (36),$$

$$u(1) = 0 \quad \dots \dots \dots (37).$$

After integrating eq. (34) we obtain the solution fulfilling the boundary conditions eqs. (36) and (37):

$$u(\zeta) = \frac{c}{R} \left[ \frac{e^{R\zeta} - 1}{e^R - 1} - \zeta \right] \quad \dots \dots \dots (38).$$



Now the average velocity parallel to the plates per unit area of the plates is given by

$$\bar{u} = \int_0^1 u(\zeta) d\zeta \quad \dots \dots \dots (39).$$

Performing the integration in eq. (39) after substituting for  $u(\zeta)$  from eq. (38) we obtain

$$\bar{u} = \frac{c}{2 R^2 (e^R - 1)} [(2 - R)(e^R - 1) - 2R] \quad \dots \dots \dots (40).$$

Hence  $u(\zeta)$  can be expressed as

$$\frac{u(\zeta)}{\bar{u}} = \frac{2 R (e^R - 1)}{[(2 - R)(e^R - 1) - 2R]} \left\{ \frac{e^{R\zeta} - 1}{e^R - 1} - \zeta \right\} \quad \dots \dots \dots (41).$$

Thus the expression for the longitudinal velocity parallel to the plates does not involve cross viscosity. It is the same therefore for classical viscous fluids also. eq. (41) is identical with BERMAN's solution (1957) for the classical viscous liquid case. It is clear from eq. (41) that the longitudinal velocity profiles do not have inflection points.

The transverse pressure variation obtained by integrating eq. (35) is given by

$$\left\{ \frac{p(x, 0) - p(x, \zeta)}{(\rho \bar{u}^2/2)} \right\} = 4 \nu_1 \left( \frac{N_{Re}}{h} \right)^2 \frac{R(1 - e^{R\zeta})(3 - 2e^R + e^{R\zeta})}{\{(2 - R)(e^R - 1) - 2R\}^2} \quad \dots \dots \dots (42),$$

where

$$N_{Re} = h \bar{u} / \nu \quad \dots \dots \dots (43)$$

is an inlet flow REYNOLDS number.

From eq. (42) it is found that the radial pressure depends upon the direction of the cross flow.

The longitudinal pressure variation obtained by integrating eq. (33) and eliminating  $c$  by expressing in terms of  $\bar{u}$  is:

$$\left\{ \frac{p(0, \zeta) - p(x, \zeta)}{(\rho \bar{u}^2/2)} \right\} \left( \frac{h N_{Re}}{x} \right) = \frac{4 R^2 (e^R - 1)}{[2R - (2 - R)(e^R - 1)]} = G(R) \quad \dots \dots \dots (44).$$

Now  $G(R)$  has no zeros on the  $R$  axis and is positive for some value of  $R$ . Hence  $G(R)$  is always positive. This implies that the longitudinal pressure always drops in the direction of the longitudinal flow regardless of the direction of the cross flow. This result is the same as that occurs in the classical viscous flow between porous plates.

### The Porous Plate Solution as the limiting form of the annulus solution

It can now be demonstrated that the solution given by eqs. (41) and (44) for the porous plate problem involving the non-Newtonian flow is a special case of the annulus problem for the non-Newtonian case. For comparison with the flat plate solution it is necessary to transform some quantities in the annulus problem. The dimensionless parameter  $\lambda = r/a$  used in the annulus problem, and the cross flow REYNOLDS number  $R$  of the annulus problem are transformed so that they are expressed in terms of the distance between the annulus walls instead of the larger radius of the annulus. This can be done simply by using the following relations for the new distance parameter and cross flow REYNOLDS number.

$$\zeta = \frac{\lambda - \sigma}{1 - \sigma} \quad \dots \dots \dots (45),$$

$$R' = \nu_a (a - b) / \nu = R (1 - \sigma) \quad \dots \dots \dots (46).$$

Further since we wish to examine the annulus solution in the limit  $\sigma \rightarrow 1$  it is convenient to put

$$\sigma = 1 - \varepsilon \quad \dots \dots \dots (47)$$

and examine the effect of passing to the limit as  $a$  and  $b$  approach infinity in such a way that  $\sigma = b/a$  approaches unity.

Incidentally we might observe as  $a$  approaches infinity  $K = \frac{2 \nu_1}{a^2}$  approaches zero. Thus eq. (19) becomes in this case

$$\frac{u(\lambda)}{\bar{u}} = 2(R + 2) \left[ \frac{(1 - \lambda^2)(1 - \sigma^R) - (1 - \sigma^2)(1 - \lambda^R)}{2(1 + \sigma^2)(1 - \sigma^R) - R(1 - \sigma^2)(1 + \sigma^R)} \right] \quad \dots \dots \dots (48).$$

Now if we substitute in eq. (48), from eqs. (45), (46) and (47) we have

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{2(R' + 2\varepsilon) \{ [2(1 - \zeta) - \varepsilon(1 - \zeta)^2] [1 - (1 - \varepsilon)^{R'/\varepsilon}] - \{1 - [1 - (1 - \zeta)\varepsilon]^{R'/\varepsilon}\} (2 - \varepsilon) \}}{2[1 + (1 - \varepsilon)^2] [1 - (1 - \varepsilon)^{R'/\varepsilon}] - (2 - \varepsilon) R' [1 + (1 - \varepsilon)^{R'/\varepsilon}]} \quad (49).$$

In the limit as  $\varepsilon$  approaches zero, after using the result

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [1 - f(\zeta)\varepsilon]^{R'/\varepsilon} = e^{-f(\zeta)R'} \quad (50)$$

we obtain the limiting form of eq. (49)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u}{\bar{u}} = \frac{2R'(e^{R'\zeta} - 1)}{[(2 - R')(e^{R'\zeta} - 1) - 2R'] \left\{ \frac{e^{R'\zeta} - 1}{e^{R'\zeta} - 1} - \zeta \right\}} \quad (51),$$

eq. (51) is identical with the expression for the longitudinal velocity component given by eq. (41) in the porous plate problem.

A similar treatment indicates the equivalence of the axial pressure dependence for the annulus as  $\sigma$  approaches unity, to the longitudinal pressure for the porous plate problem for the non-Newtonian flow.

### Summary

A solution of the NAVIER-STOKES equations has been obtained for the case of the steady-state flow of a non-Newtonian liquid in an annulus with porous walls. The cross flow (radial component of flow) is produced by injecting fluid at one wall of the annulus and removing fluid at the other wall at equal rates.

When non-Newtonian fluid is injected at the outer wall and removed at the inner wall the velocity profiles (of the axial velocity component) become more asymmetrical as the cross flow velocities increase. For higher cross flow velocities the maximum axial velocity occurs at a point closer to the inner annulus wall.

For fluid injection at the inner wall and removal at the outer wall, the velocity profiles again become more asymmetrical as the cross flow velocities increase. With increasing fluid injection at the inner wall, the velocity profiles soon develop a point of inflection suggesting flow instability. At first the point at which the maximum velocity occurs is found to move closer to the outer wall, but as the cross flow velocity increases, this point recedes and moves closer to the inner wall.

Finally the point of maximum velocity as  $R$  approaches  $+\infty$  coincides with that of the case  $R$  approaching  $-\infty$ . The occurrence of asymmetrical velocity profiles and the development of points of inflexion which are true of classical viscous liquids are also true of non-Newtonian liquids. But the phenomena involving the recession of the point of maximum velocity towards the inner wall regardless of the direction of cross flow in cases of its extreme variation is not exhibited by the classical viscous liquids. This phenomenon is found to be associated with non-Newtonian liquids. The cross flow REYNOLDS number required to produce the inflection point in the profile is found to vary with the radius ratio of the annulus, becoming higher as the radius ratio becomes greater. This is also the case with classical viscous liquids (BERMAN 1957).

The radial component of velocity varies inversely with distance from the inner wall, as required by continuity.

The pressure variation in the radial direction is found to be dependent on the direction of the cross flow unlike the case of classical viscous fluids.

The pressure variation in the axial direction is also found to be dependent on the direction of the cross flow and is found always to decrease in the direction of the axial flow. For the same average axial velocity the axial pressure drop per unit length, when cross flow is present, is greater than that for a solid wall annulus and the difference becomes more exaggerated, as the radius ratio of the annulus decreases, which is also the case with classical viscous liquid. Further for the non-Newtonian flow this difference becomes much more pronounced in the case of injection at the outer wall and fluid removal at the inner wall than in the case of injection at the inner wall and fluid removal at the outer wall.

The solution of the problem of non-Newtonian flow between two porous plates has been found in a procedure analogous to that used for the annulus. Also it is found that the solution for the porous plate problem could be obtained as a limiting form of that for the annulus problem. As the radius ratio of the annulus increases, that the properties in general, of the annulus flow approach those for the steady state flow between two porous plates, which is true of Newtonian liquids, is found to be true of non-Newtonian liquids also.



## References

- [1] A. S. BERMAN, J. Appl. Phys. **24** (1953), 1232.
- [2] A. S. BERMAN, J. Appl. Phys. **27** (1956), No. 12, pp. 1557—1558.
- [3] A. S. BERMAN, J. Appl. Phys. **29** (1958), No. 1, p. 71—75.
- [4] A. S. BERMAN, Proc. 2nd International Conference on Peaceful uses of Atomic energy, Geneva (1958) Vol. 4, pp. 351.
- [5] M. MORDUCHOW, Quart. J. Appl. Math., XIV (1957), p. 361.
- [6] M. N. L. NARASIMHAN, Proc. Ind. Acad. Sc. (Ser. A) **43** (1956), No. 4.
- [7] M. REINER, Quart. J. Mech. and Applied Math. (1952), No. 1164, P 16.
- [8] R. S. RIVLIN, Proc. Roy. Soc. Lond. (A) **193** (1948), p. 260.
- [9] J. R. SELLARS, J. Appl. Phys. **26** (1955), p. 489.
- [10] S. W. YUAN and A. B. FINKELSTEIN, Trans. Am. Soc. Mech. Engrs. **78** (1956), p. 719.

Manuskripteingang: 22. 3. 1960

Anschrift: Dr. M. N. L. NARASIMHAN, Indian Institute of Technology, Dept. of Mathematics, P. O. I. I. T. Bombay, Powai, Bombay-76, India

ZAMM **41** (1961) Heft 1/2, Seite 54—65

# Geometrische Darstellung der Weierstraßschen $\wp$ -Funktion

Von F. REUTTER

*Im Anschluß an frühere Arbeiten des Verfassers über die nomographische Darstellbarkeit elliptischer Funktionen werden Nomogramme entwickelt, mit deren Hilfe die natürlichen Logarithmen der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion mit komplexem Argument  $z = x + iy$  und beliebigen reellen Invarianten  $g_2, g_3$  abgelesen werden können. Es zeigt sich, daß bei der Darstellung durch ein Fluchtliniennomogramm die Skalen für  $x$  und  $y$  auf Kegelschnitten und die für die abhängige Veränderliche auf Geraden liegen. Die Ermittlung des zu gegebenen  $g_2, g_3$  gehörigen Kegelschnitts und eines zugehörigen Graduierungsfaktors erfolgt mit Hilfe einer Schar Neilscher Parabeln.*

*In continuation of previous papers on nomographic representation of elliptic functions nomograms are being developed which give the natural logarithms of the Weierstrass  $\wp$ -function of complex argument  $z = x + iy$  and arbitrary real invariants  $g_2, g_3$ . It is found that in the nomographic representation the scales for  $x$  and  $y$  are conic sections while the scales for the dependent variable are linear. The determination of the conic section belonging to given values of  $g_2$  and  $g_3$  as well as the determination of the scale factor is carried out with the help of a set of Neil parabolas.*

Примыкая к более ранним работам автора о номографической представимости эллиптических функций разрабатываются номограммы, при помощи которых можно вычислить натуральные логарифмы  $\wp$ -функции Вейерштрасса с комплексным аргументом  $z = x + iy$  и любые вещественные инварианты  $g_2, g_3$ . Оказывается, что при представлении посредством номограммы с выравненными точками шкалы для  $x$  и  $y$  лежат на конических сечениях, в то время как для независимой переменной лежит на прямой. Определение конического сечения, соответствующего данным  $g_2, g_3$  и надлежащего коэффициента градуировки производится при помощи семейства парабол Нейля.

## 1. Die nomographische Darstellbarkeit der $\wp$ -Funktion

In [1]<sup>1)</sup> wurde u. a. gezeigt, daß die Funktion

$$w = \ln [\wp(z; g_2, g_3) - e_1] = u + iv \quad \dots \dots \dots (1,1),$$

wobei  $g_2 = -4(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2)$ ,  $g_3 = 4e_1 e_2 e_3$  reell sind und  $e_1$  eine reelle Wurzel der Gleichung

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 4(t - e_1)(t - e_2)(t - e_3) = 0 \quad \dots \dots \dots (1,2)$$

bedeutet, sowohl für reelle Werte von  $e_1, e_2, e_3$  als auch für einen reellen Wert  $e_2$  und ein konjugiert komplexes Paar  $e_1, e_3$  durch ein Fluchtliniennomogramm darstellbar ist. Die  $u$ -Skala und die  $v$ -Skala liegen je auf einer Geraden, deren gegenseitige Lage noch frei wählbar ist. Die  $x$ -Skala und die  $y$ -Skala haben einen Kegelschnitt zum gemeinsamen Skalenträger.

Da die Mannigfaltigkeit der  $\wp$ -Funktionen mit reellen  $g_2, g_3$  eine  $\infty^2$ -fache ist, ergeben sich insgesamt  $\infty^2$  Kegelschnitte als Träger der Skalen für  $x$  und  $y$ . Man könnte diese so anordnen, daß man jeweils die zu einem festen Wert von  $g_2$  gehörige Skalenmannigfaltigkeit auf ein Blatt aufzeichnet, wobei dann  $g_3$  der Parameterwert der einzelnen Skala für  $x$  und  $y$  ist. Jedoch kann man, wie in 3. gezeigt wird, erreichen, daß man mit einem einzigen Kegelschnittbüschel auskommt.

## 2. Die Skalengleichungen

Wählt man als Träger der Skalen für  $u$  und  $v$  zwei parallele Geraden mit den Gleichungen  $\xi = 0$  und  $\xi = c$ , so erhält man nach [1] für die Funktion (1,1) mit  $e_1 = e_2$ <sup>2)</sup> die folgenden Skalengleichungen:

<sup>1)</sup> Die in [ ] gesetzten Ziffern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

<sup>2)</sup> Dies bedeutet keine Einschränkung, da  $e_2$  mit jeder reellen Wurzel von (1, 2) identifiziert werden kann (vgl. 3.).

*x*-Skala:

$$\left. \begin{aligned} \xi = f_3(x) &= \frac{c c_1 \wp'^2}{c_1 \wp'^2 - c_2 \{(\wp - e_2)^2 - \Delta_1/16\}^2}, \\ \eta = g_3(x) &= \frac{c_1 c_2 \{(\wp - e_1)^2 (\wp - e_3)^2 - (e_1 - e_3)^2 (\wp - e_2)^2\}}{c_1 \wp'^2 - c_2 \{(\wp - e_2)^2 - \Delta_1/16\}^2} + \frac{f_3(x)}{c} (d_2 - d_1) + d_1 \end{aligned} \right\} \quad (2,1),$$

*y*-Skala:

$$\left. \begin{aligned} \xi = f_4(y) &= \frac{c c_1 \wp_-'^2}{c_1 \wp_-'^2 + c_2 \{(\wp_- + e_2)^2 - \Delta_1/16\}^2}, \\ \eta = g_4(y) &= \frac{c_1 c_2 \{(\wp_- + e_1)^2 (\wp_- + e_3)^2 - (e_1 - e_3)^2 (\wp_- + e_2)^2\}}{c_1 \wp_-'^2 + c_2 \{(\wp_- + e_2)^2 - \Delta_1/16\}^2} + \frac{f_4(y)}{c} (d_2 - d_1) + d_1 \end{aligned} \right\} \quad (2,2),$$

wobei

$$\Delta_1 = 16(e_2 - e_1)(e_2 - e_3), \quad \wp = \wp(x; g_2, g_3), \quad \wp_- = \wp(y; g_2, -g_3),$$

$$\wp' = \frac{d}{dx} \wp(x; g_2, g_3), \quad \wp_-' = \frac{d}{dy} \wp(y; g_2, -g_3),$$

*u*-Skala:

$$\left. \begin{aligned} \xi = 0, \quad \eta = g_2(u) &= -c_2 \sinh u + d_2 \quad \text{für} \quad \Delta_1 < 0, \\ \xi = 0, \quad \eta = g_2(u) &= c_2 \cosh u + d_2 \quad \text{für} \quad \Delta_1 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2,3),$$

*v*-Skala:

$$\left. \begin{aligned} \xi = c, \quad \eta = g_1(v) &= -c_1 \cos v + d_1 \quad \text{für} \quad \Delta_1 < 0, \\ \xi = c, \quad \eta = g_1(v) &= c_1 \cos v + d_1 \quad \text{für} \quad \Delta_1 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2,4).$$

Die Größen  $c_1, c_2, d_1, d_2$  sind noch frei wählbare Integrationskonstanten, durch die man die Form des Nomogramms im Hinblick auf Anforderungen an die Ablesegenauigkeit für bestimmte Bereiche der Veränderlichen beeinflussen kann („Formgebungskonstanten“, s. [2]).

Zur praktischen Berechnung der Skalen sind  $\wp, \wp', \wp_-, \wp_-'$  in (2,1) und (2,2) mittels bekannter Beziehungen<sup>3)</sup> auf die JACOBIschen Funktionen zurückzuführen. Mit Hilfe dieser Beziehungen gewinnt man aus (2,1) und (2,2) die Gleichung des gemeinsamen Trägers der *x*- und der *y*-Skala:

$$\begin{aligned} \xi^2 \left[ (d_1 - d_2)^2 - c_2^2 \frac{\Delta_1}{16} - c_1^2 \right] + 2(d_1 - d_2) c \xi \eta + c^2 \eta^2 + \\ + 2c \xi [c_1^2 - d_1^2 + d_1 d_2] - 2c^2 d_1 \eta + c^2 (d_1^2 - c_1^2) + 3c_1 c_2 \xi (c - \xi) e_2 = 0 \end{aligned} \quad (2,5).$$

Durch die Transformation

$$\xi_1 = \frac{\xi}{c \eta}, \quad \eta_1 = -\frac{\xi - c}{c \eta} \quad (2,6)$$

wird dem Nomogramm mit den Skalengleichungen (2,1) — (2,4) ein Nomogramm mit den aufeinander senkrechten Geraden  $\xi_1 = 0$  als Träger der *u*-Skala und  $\eta_1 = 0$  als Träger der *v*-Skala und der Gleichung

$$\xi_1^2 (d_1^2 - c_1^2) + 2d_1 d_2 \xi_1 \eta_1 + \eta_1^2 \left( d_2^2 - c_2^2 \frac{\Delta_1}{16} \right) + 2d_1 \xi_1 + 2d_2 \eta_1 + 1 + 3c_1 c_2 e_2 \xi_1 \eta_1 = 0 \quad (2,7)$$

für den Träger der *x*- und der *y*-Skala zugeordnet. Die Gleichungen der zugehörigen Skalen sind:*x*-Skala:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = F_3(x) &= \frac{c_2 \{(\wp - e_2)^2 - \Delta_1/16\}^2}{c_1 c_2 \{(\wp - e_1)^2 (\wp - e_3)^2 - (e_1 - e_3)^2 (\wp - e_2)^2\} + d_2 c_1 \wp'^2 - d_1 c_2 \{(\wp - e_2)^2 - \Delta_1/16\}^2}, \\ \eta_1 = G_3(x) &= \frac{-c_1 \wp'^2}{c_1 c_2 \{(\wp - e_1)^2 (\wp - e_3)^2 - (e_1 - e_3)^2 (\wp - e_2)^2\} + d_2 c_1 \wp'^2 - d_1 c_2 \{(\wp - e_2)^2 - \Delta_1/16\}^2} \end{aligned} \right\} \quad (2,8),$$

*y*-Skala:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = F_4(y) &= \frac{-c_2 \{(\wp_- + e_2)^2 - \Delta_1/16\}^2}{c_1 c_2 \{(\wp_- + e_1)^2 (\wp_- + e_3)^2 - (e_1 - e_3)^2 (\wp_- + e_2)^2\} + d_2 c_1 \wp_-'^2 + d_1 c_2 \{(\wp_- + e_2)^2 - \Delta_1/16\}^2}, \\ \eta_1 = G_4(y) &= \frac{-c_1 \wp_-'^2}{c_1 c_2 \{(\wp_- + e_1)^2 (\wp_- + e_3)^2 - (e_1 - e_3)^2 (\wp_- + e_2)^2\} + d_2 c_1 \wp_-'^2 + d_1 c_2 \{(\wp_- + e_2)^2 - \Delta_1/16\}^2} \end{aligned} \right\} \quad (2,9),$$

<sup>3)</sup> S. z. B. L. M. MILNE-THOMSON, Jacobian Elliptic function tables, New York 1950, S. 23/24.



*u*-Skala:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = G_2(u) &= \frac{1}{c_2 \sinh u - d_2} & \text{für} & \quad \Delta_1 < 0, \\ \xi_1 = 0, \quad \eta_1 = G_2(u) &= \frac{-1}{c_2 \cosh u + d_2} & \text{für} & \quad \Delta_1 > 0 \end{aligned} \right\} \dots (2,10),$$

*v*-Skala:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = G_1(v) &= \frac{1}{c_1 \cos v - d_1}, \quad \eta_1 = 0 & \text{für} & \quad \Delta_1 < 0, \\ \xi_1 = G_1(v) &= \frac{-1}{c_1 \cos v + d_1}, \quad \eta_1 = 0 & \text{für} & \quad \Delta_1 > 0 \end{aligned} \right\} \dots (2,11).$$

Gleichung (2,5) bzw. (2,7) stellt eine lineare Mannigfaltigkeit von  $\infty^2$  Kegelschnitten, ein Kegelschnittbündel, dar mit den Bündelparametern  $e_2$  und  $\Delta_1 = 16 (e_2 - e_1) (e_2 - e_3)$ . Zu jedem gegebenen Wertepaar  $g_2, g_3$  gehört ein Wertepaar  $e_2, \Delta_1$ . Alle Kegelschnitte des Bündels (2,5) haben die Punkte  $P_1(0, d_1 + c_1)$ ,  $P_2(0, d_1 - c_1)$  auf dem Träger der *v*-Skala gemeinsam. Sie schneiden den Träger der *u*-Skala in zwei Punkten  $P_3(c, d_2 + c_2 \sqrt{\Delta_1/4})$ ,  $P_4(c, d_2 - c_2 \sqrt{\Delta_1/4})$ , d. h. alle zu einem festen Wert von  $\Delta_1$  gehörigen Kegelschnitte des Bündels haben dieselben Schnittpunkte  $P_3, P_4$  mit dem Träger der *u*-Skala. Die Punkte  $P_3, P_4$  sind ein reelles bzw. konjugiert komplexes Punktepaar, je nachdem, ob  $\Delta_1 \geq 0$  ist. Die Schnittpunkte der Kurven des Bündels (2,7) mit dem Träger der *v*-Skala sind die beiden Punkte  $P_1(-1/(c_1 + d_1), 0)$ ,  $P_2(1/(c_1 - d_1), 0)$ , mit dem Träger der *u*-Skala  $P_3(0, -1/(d_2 + c_2 \sqrt{\Delta_1/4}))$ ,  $P_4(0, -1/(d_2 - c_2 \sqrt{\Delta_1/4}))$ . Die Kegelschnitte des Bündels (2,5) wie auch (2,7) verteilen sich auf  $\infty^1$  Kegelschnittbüschel mit dem Büschelparameter  $e_2$  derart, daß zu jedem Büschel ein fester Wert von  $\Delta_1$  gehört. Alle diese Büschel haben vier bzw. zwei reelle und zwei konjugiert komplexe Grundpunkte, je nachdem  $\Delta_1 > 0$  bzw.  $\Delta_1 < 0$  ist.

### 3. Büschel von Kegelschnitten zur Ermittlung von $w$ bei gegebenem $z$ und $k_p^2$

Die vorstehenden Überlegungen geben eine Möglichkeit, die Mannigfaltigkeit der zu berechnenden *x*- und *y*-Skalen von  $\infty^2$  auf  $\infty^1$  zu verringern, indem man nur die Skalen für einen festen Wert von  $\Delta_1$  berechnet. Entsprechend den zu  $\Delta_1 \geq 0$  gehörigen verschiedenen geometrischen Konfigurationen werden zwei Werte  $\Delta_1$  gewählt und zwar zweckmäßig

$$\Delta_1 = 16 (e_2 - e_1) (e_2 - e_3) = +16 \dots (3,1)$$

bzw.

$$\Delta_1 = 16 (e_2 - e_1) (e_2 - e_3) = -16 \dots (3,2).$$

Die Wahl (3,1) führt zu einem Kegelschnittbüschel mit vier reellen, die Wahl (3,2) zu einem Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei konjugiert komplexen Grundpunkten als Träger der Skalen für *x* und *y*. Sie bedeutet keine Beschränkung auf Nomogramme für Funktionen, deren Invarianten  $g_2$  und  $g_3$  solche Werte haben, daß die zugehörigen  $e_i$  den Bedingungen (3,1) bzw. (3,2) genügen. Vielmehr läßt sich mit Hilfe eines Nomogramms, das für  $\wp(z; e_1, e_2, e_3)$  angelegt ist, auch der Wert von  $\wp(z^*; e_1^*, e_2^*, e_3^*)$  mit  $e_i^* = \lambda e_i$  bestimmen, so daß

$$\Delta_1^* = 16 (e_2^* - e_1^*) (e_3^* - e_3^*) = 16 \lambda^2 \dots (3,1a)$$

bzw.

$$\Delta_1^* = 16 (e_2^* - e_1^*) (e_3^* - e_3^*) = -16 \lambda^2 \dots (3,2a).$$

Es wird auf Grund der Homogenitätsrelation der  $\wp$ -Funktion<sup>4)</sup>

$$\wp(z^*; e_1^*, e_2^*, e_3^*) = \wp\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}}; \lambda e_1, \lambda e_2, \lambda e_3\right) = \lambda \wp(z; e_1, e_2, e_3) \dots (3,3),$$

also

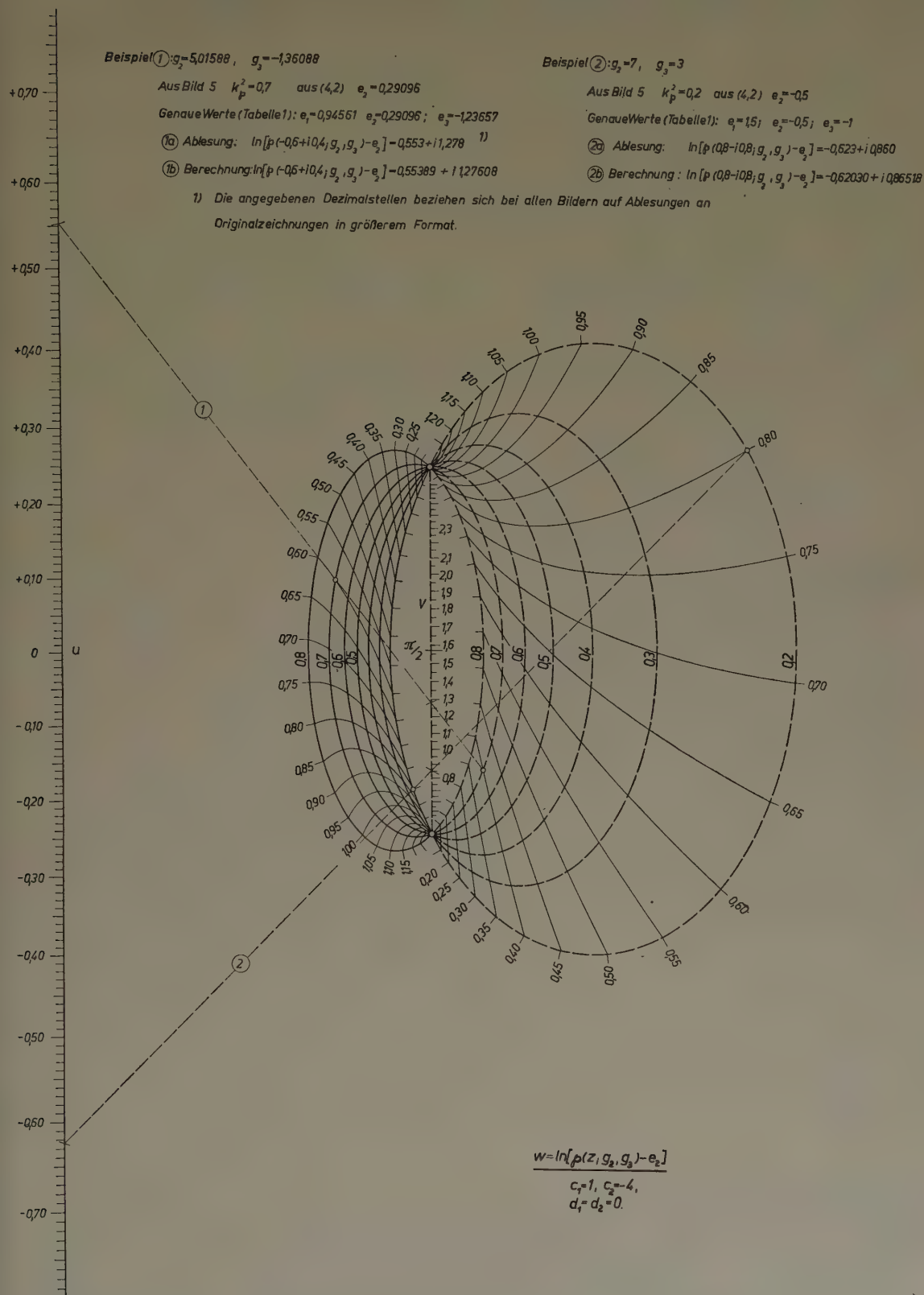
$$z^* = \frac{z}{\sqrt{\lambda}}.$$

Die Ablesegerade zu den Argumenten  $x^*$  und  $y^*$  ist also durch die Skalenpunkte  $x = \sqrt{\lambda} x^*$  und  $y = \sqrt{\lambda} y^*$  bestimmt. Zu dem hierzu ermittelten Funktionswert  $w = u + iv$  ist noch  $\ln \lambda$  zu addieren, um den Funktionswert

$$w^* = u^* + iv^* = \ln [\wp(x^* + iy^*; e_1^*, e_2^*, e_3^*) - e_2^*] = u + iv + \ln \lambda \dots (3,4)$$

zu erhalten. Damit ist der  $\infty^2$ -fachen Mannigfaltigkeit von  $\wp$ -Funktionen mit reellen Invarianten eine  $\infty^2$ -fache Mannigfaltigkeit von *x*- und *y*-Skalen derart zugeordnet, daß ein jeder Kegelschnitt

<sup>4)</sup> S. z. B. TRICOMI-KRAFFT, Ellipt. Funktionen, Leipzig 1948, S. 60.





des Büschels (2,5) bzw. (2,7) mit  $\Delta_1 = +16$  bzw.  $\Delta_1 = -16$  je  $\infty^1 x$ -Skalen und  $\infty^1 y$ -Skalen trägt, wobei jedoch an jede Skala nur eine einzige Bezifferung angeschrieben wird. Aus dieser gewinnt man alle übrigen Bezifferungen durch Multiplikation mit dem zugehörigen *Graduierungsfaktor*  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ .

Je nach den Werten der  $e_i$  sind folgende Fälle zu unterscheiden:

A) Alle  $e_i$  seien reell mit

$$e_1 = \mu + \nu, \quad e_2 = -2\mu, \quad e_3 = \mu - \nu, \quad \mu, \nu \text{ reell.}$$

Dann ist  $g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 > 0$ .

Ist a)  $e_1 > e_2 > e_3$ , also  $3|\mu| < |\nu|$ , so wird  $\Delta_1 < 0$ .

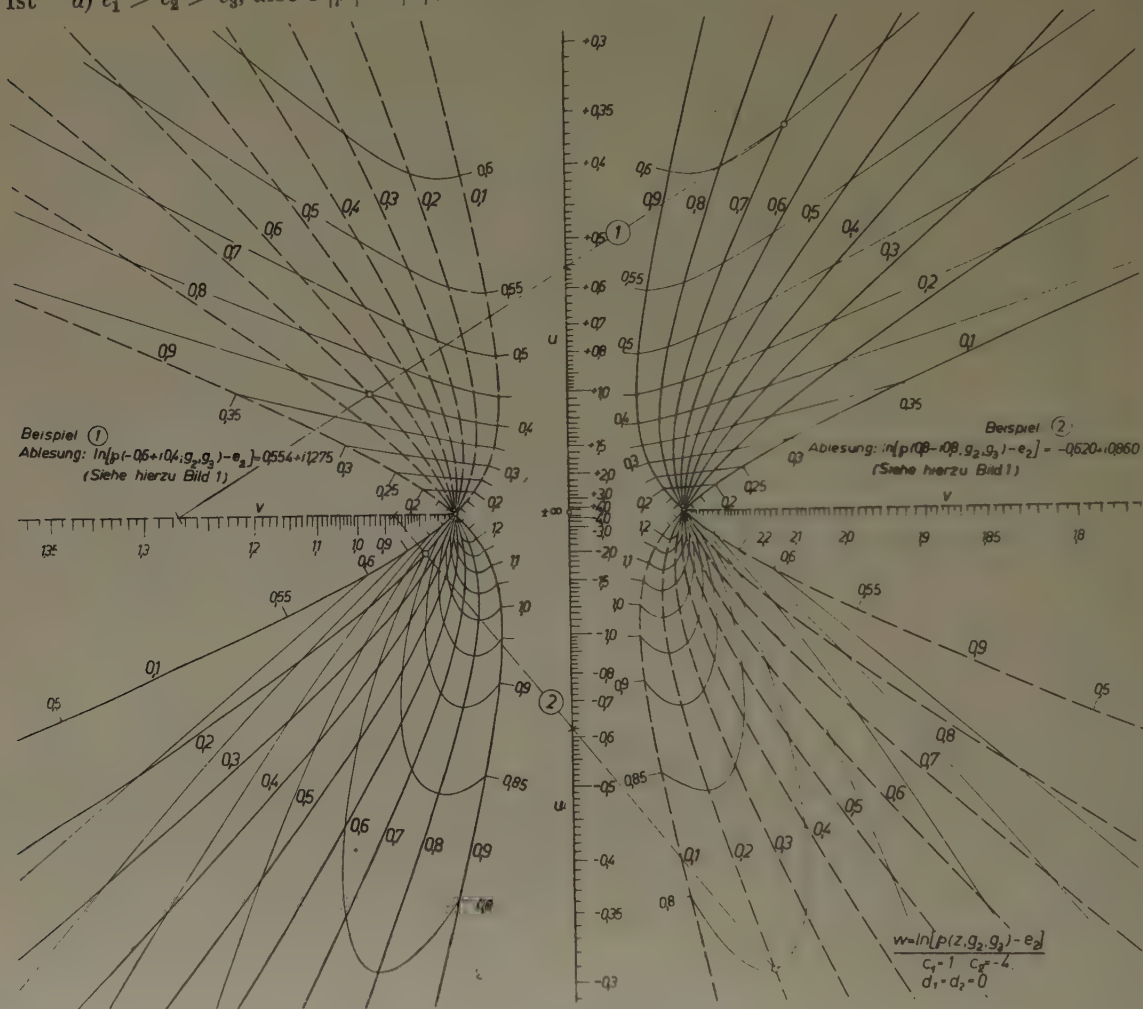


Bild 2

Ist dagegen  $3|\mu| > |\nu|$ , was je nach dem Vorzeichen von  $\mu$  auf

b)  $e_2 > e_1 > e_3$  mit  $\mu < 0, \quad \nu < -3\mu$

c)  $e_1 > e_3 > e_2$  mit  $\mu > 0, \quad \nu < +3\mu$

führt, so wird  $\Delta_1 > 0$ .

B) Es sei

$$e_1 = \mu + i\nu, \quad e_2 = -2\mu, \quad e_3 = \mu - i\nu, \quad \mu, \nu \text{ reell.}$$

Dann ist  $g_2^3 - 27g_3^2 < 0$ . Hier ergibt sich stets  $\Delta_1 > 0$ .

Der Parameter des Kegelschnittbüschels war zunächst  $e_2$ . Er hat aber den Nachteil, daß er nur für die den Bedingungen (3,1) oder (3,2) genügenden Wertetripel  $e_1, e_2, e_3$  gilt. Doch läßt sich im Falle A) in

$$k_{\wp}^2 = \frac{e_2}{e_1 - e_3} \quad \dots \quad (3.5)$$

Beispiel ①  $g_2 = 351111$   $g_3 = -0,79702$

Aus Bild 5  $n_{\text{pr}}^2 = \frac{1}{0.7}$ , aus (42)  $\sigma_{2K} = 0.79116$

Genaue Werte.  $e_{1x} = 0,24343$ ,  $e_{2x} = 0,79116$ ,  $e_{3x} = -1,03459$

⑩ Ableitung:  $\ln[p(-\frac{0,5}{\sqrt{2}} + i\frac{0,4}{\sqrt{2}}; e_{1,2}, e_{2,1}, e_{2,2}) - e_{2,2}] = 0,330 + i1,654$  mit  $\sqrt{2} = 0,91469$

1b) Berechnung:  $\ln\left[p\left(-\frac{0,6}{\sqrt{1,2}} + i\frac{0,4}{\sqrt{1,2}}; e_{1X}, e_{2X}, e_{3X}\right) - e_{2X}\right] = 0,33550 + i1,66019$

Beispiel ②  $g_2 = 25,39967, g_3 = -24,41793$

Aus Bild 5  $k_{\text{BX}}^2 = \frac{1}{0,985}$ , aus (4,2)  $e_{2\pi} = 1,56510$

Genauere Werte:  $e_{\text{III}} = 1,34178$ ;  $e_{2\text{III}} = 1,56510$ ;  $e_{3\text{III}} = -2,90688$

(2a) Ablesung:  $\ln[p(0,35+10,5, e_{1,1}, e_{2,1}, e_{3,1}) - e_{1,1}] = 1,176 - 1,2472$

②b) Berechnung:  $\ln[p(0,35+105, e_{\pi}, e_{\pi}, e_{\pi}) - e_{\pi}] = 1,17503 - 1246819$

Vergleich mit Beispiel 1, Bild 1 und 2:

Aus 3 (b)  $p(-\frac{0.6}{\sqrt{2}} + i \frac{0.4}{\sqrt{2}}; e_{1\pi}, e_{2\pi}, e_{3\pi}) = 0.66629 + i 1.39303 \quad (\lambda = 0.83666)$ 
$$\frac{1}{2} p(-\frac{0.6}{\sqrt{2}} + j\frac{0.4}{\sqrt{2}}; e_{1H}, e_{2H}, e_{3H}) = 0.79637 + j1.66499$$

Aus 1 (7b)  $p(-0,6 + i0,4, e_1, e_2, e_3) = 0,79637 + i1,66499$



<sup>5)</sup> Zur Wahl der Formgebungskonstanten s. [2].





Durch Umnumerierung der  $e_i$  gewinnt man aus  $k_{\wp I}^2$  zwei weitere Werte  $k_{\wp II}^2$  und  $k_{\wp III}^2$ . Davon ist stets einer größer als Eins und einer kleiner als Null. In beiden Fällen gelangt man zu einem Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten. Das Nomogramm für die Funktion

$$w = \ln [\wp(z_{\wp II}) - e_{2II}] \quad \text{mit} \quad k_{\wp II}^2 > 1$$

erlaubt gleichzeitig die Ablesung der Funktion

$$w = \ln [\wp(z_{\wp III}) - e_{2III}] \quad \text{mit} \quad k_{\wp III}^2 < 0,$$

wobei zu  $\wp(z_{\wp III})$  die Werte  $e_{iIII}$ , zu  $\wp(z_{\wp II})$  die Werte  $e_{iII}$  gehören, so daß

$$e_{1II} = -e_{3III}, \quad e_{2II} = -e_{2III}, \quad e_{3II} = -e_{1III}.$$

Als Beziehung zwischen den Skalenpunkten ergibt sich

$$x_{\wp III} = y_{\wp II}, \quad y_{\wp III} = -x_{\wp II}.$$

Bild 3 zeigt ein Nomogramm für  $k_{\wp II}^2 > 1$  (Fall **A b**). Zwischen den Skalenträgern für  $x$  und  $y$  in Bild 3 und denjenigen der Bilder 1 und 2 besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung, die durch  $k_{\wp I}^2 = \frac{1}{k_{\wp II}^2}$  gegeben ist. Jedoch drängen sich in einem Nomogramm des Typus Bild 3 die  $x$ -Skalen, die zu den Werten  $k_{\wp I}^2 < 0,5$ , also  $k_{\wp II}^2 > 2$  gehören, so dicht zusammen, und die  $y$ -Skalen haben einen so großen Platzbedarf, daß ihre Einzeichnung nicht erfolgen kann. Diese Nomogramme sind demnach besonders für Werte von  $k_{\wp I}^2$  nahe bei Eins geeignet. Bild 3 enthält Skalen für das Intervall  $0,5 \leq k_{\wp I}^2 \leq 0,998$ . Die Bilder 1, 2 und 3 ergänzen sich daher wechselseitig. Für eine Reihe von Werten  $k_{\wp I}^2$  sind Ablesungen in beiden Bildern möglich. Jedoch hat man bei einem Vergleich die Relation (3,4) zu beachten. Außerdem tritt wegen (3,1) beim Übergang von  $k_{\wp I}^2$  zu  $k_{\wp II}^2$  nicht nur eine Umnumerierung der Werte  $e_i$  ein, sondern diese multiplizieren sich auch noch mit  $\lambda = k_{\wp I}$ .

Im Falle **B** soll zur Kennzeichnung der Kurven des Kegelschnittbüschels die Größe

$$k_{\wp}^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e_2 \dots \dots \dots (3,6)$$

benutzt werden, solange (3,1) erfüllt ist. In diesem Falle ist  $0 < k_{\wp}^2 < 1$ . Stets ist  $\Delta_1 > 0$ . Bild 4 zeigt ein solches Nomogramm. — In den Bildern 1—4 tragen die Skalen für  $x$ ,  $y$  und  $v$  eine abzählbar unendliche Mannigfaltigkeit von Beschriftungsziffern, die im allgemeinen positive und negative Werte annehmen können; es ist jeweils nur eine einzige angeschrieben. Soweit nur positive oder nur negative Werte möglich sind, ist das durch Vorsetzen eines Zeichens + oder — in der Skalenbeschriftung angegeben. Dies gilt auch für Bild 6. (S. hierzu auch 6.)

#### 4. Kurven zur Ermittlung der Werte $k_{\wp}^2$ , $\lambda$ und $e_2$ zu gegebenen $g_2$ , $g_3$

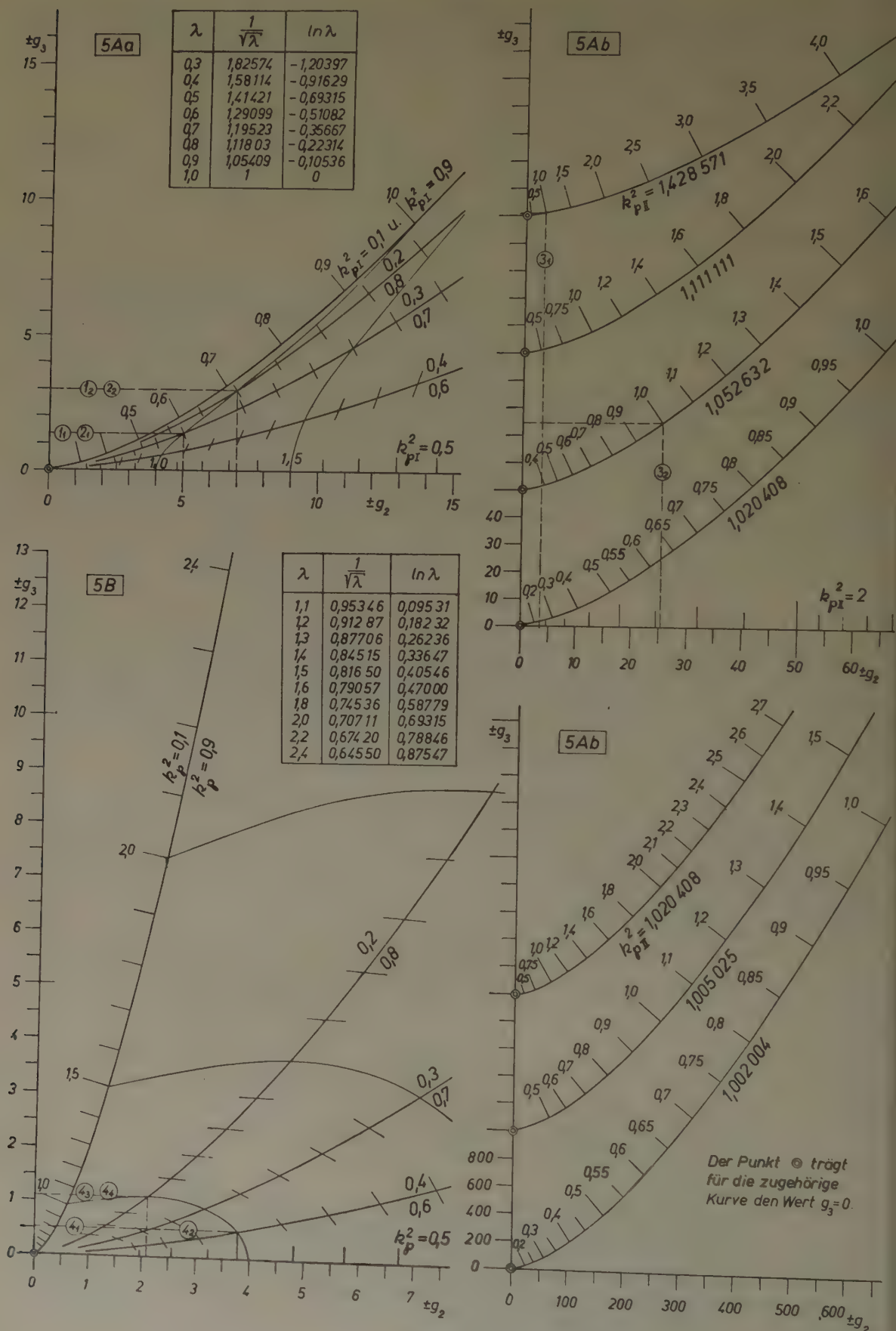
Tabelle 1 gibt für  $\Delta_1 < 0$ ,  $0 < k_{\wp I}^2 < 1$  eine Übersicht über die Zuordnung der reellen Werte  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  sowie der Invarianten  $g_2$ ,  $g_3$  zu den Werten  $k_{\wp I}^2$  an. Analoge Tabellen lassen sich für die beiden zu  $\Delta_1 > 0$  gehörigen Fälle aufstellen. Die zum Fall **A b** gehörige Tabelle mit den Werten  $e_{iII}$  ergibt sich aus Tabelle 1, indem die dort angeschriebenen Werte  $e_i = e_{iI}$  mit  $k_{\wp I}$  multipliziert und anschließend so umnumeriert werden, daß  $e_{2II} > e_{1II} > e_{3II}$ .

Tabelle 1

$k_{\wp I}^2$		$\alpha) e_1$	$\alpha) e_2$	$\alpha) e_3$	$\alpha) \text{ und } \beta) g_2$	$\alpha) g_3$
$\alpha)$	$\beta)$	$\beta) - e_3$	$\beta) - e_2$	$\beta) - e_1$		$\beta) - g_3$
0,1	0,9	2,11111	—0,88889	—1,22222	13,48148	9,17421
0,2	0,8	1,5	—0,5	—1	7,0	3,0
0,3	0,7	1,23657	—0,29096	—0,94561	5,01588	1,36088
0,4	0,6	1,08866	—0,13608	—0,95258	4,22220	0,56449
0,5	0,5	1	0	—1	4,0	0

Sind  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  nicht explizit bekannt, sondern die Invarianten  $g_2$ ,  $g_3$  gegeben, so lassen sich diesen im Falle **A** je nach der gedachten Numerierung der  $e_i$  drei verschiedene Werte  $k_{\wp}^2$  mit  $0 < k_{\wp I}^2 < 1$ ,  $k_{\wp II}^2 > 1$ ,  $k_{\wp III}^2 < 0$ , im Falle **B** unter der Zusatzbedingung (3,1) ein  $k_{\wp}^2$  mit  $0 < k_{\wp}^2 < 1$  zuordnen. Die Ermittlung der Werte  $k_{\wp I}^2$ ,  $k_{\wp II}^2$ ,  $k_{\wp}^2$  und des Graduierungsfaktors kann graphisch mit Hilfe der Bilder 5 erfolgen. In den Bildern 5 Aa und 5 B sind auch die Kurven  $\lambda = \text{const}$  eingetragen, und es ist der zugehörige Graduierungsfaktor  $1/\sqrt{\lambda}$  und der Wert  $\ln \lambda$  (s. (3,4)) angeschrieben. Bild 5 Aa kann man auch für den Fall **A b** benutzen, wenn man die zugehörigen Werte  $\lambda$

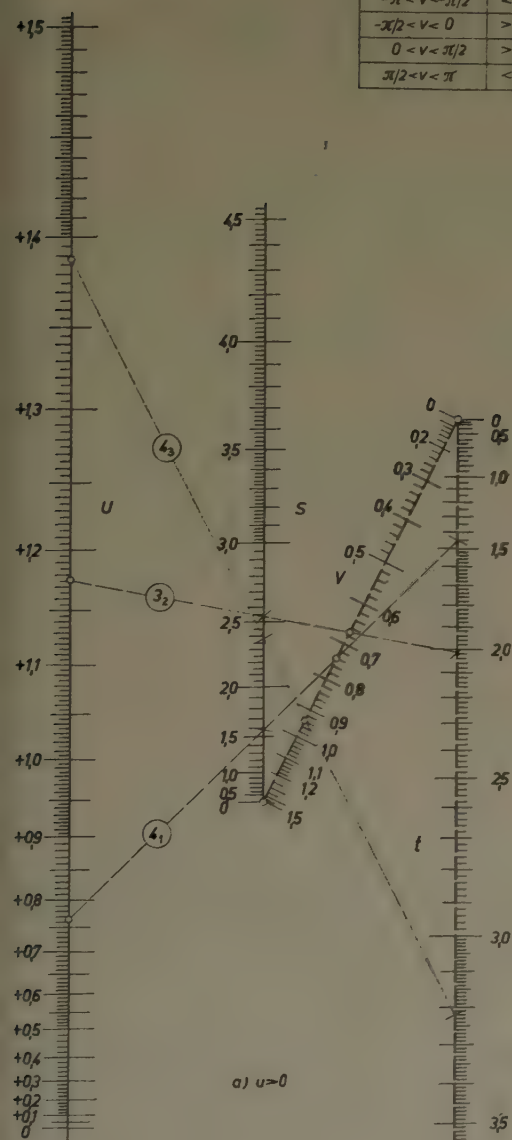
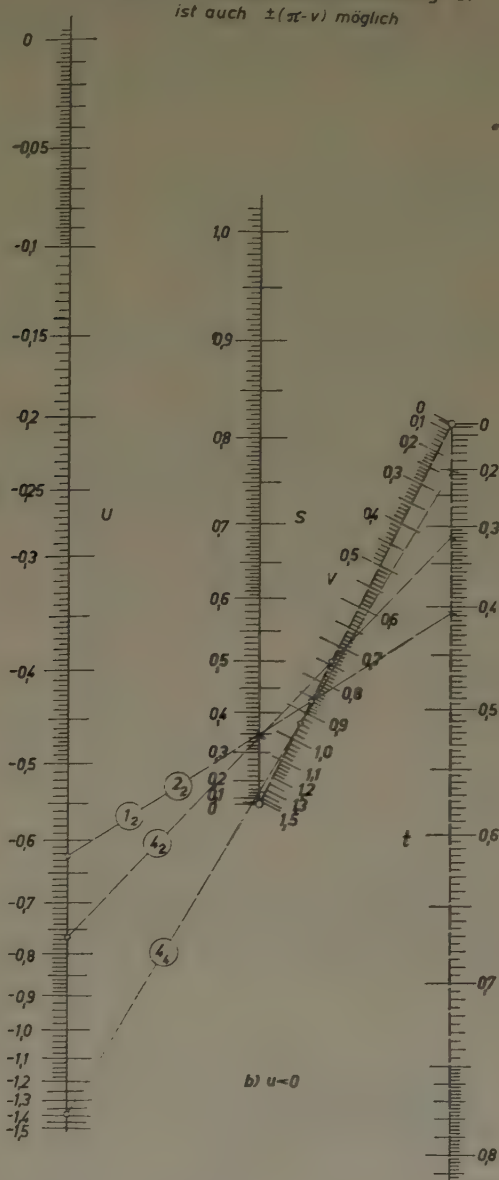




Bilder 5

$v^{*)}$	$s$	$t$
$-\pi < v < -\pi/2$	$< 0$	$< 0$
$-\pi/2 < v < 0$	$> 0$	$< 0$
$0 < v < \pi/2$	$> 0$	$> 0$
$\pi/2 < v < \pi$	$< 0$	$> 0$

\*) Außer der angeschriebenen Bezifferung  $\pm v$  ist auch  $\pm(\pi - v)$  möglich

a)  $u=0$ b)  $u=0$ 

Beispiele:  $(\wp(z_1, g_2, g_3) = e^w + e_2)$

1)  $\textcircled{3}_2$  Ablesung:  $e^w = -2,54 - i2,015$   
Berechnung:  $e^w = -2,53132 - i2,01950$

$\textcircled{4}_1$  Ablesung:  $e^w = 1,58 - i1,45$   
Berechnung:  $e^w = 1,59450 - i1,44654$

$\textcircled{4}_3$  Ablesung:  $e^w = 2,38 - i3,220$   
Berechnung:  $e^w = 2,38022 - i3,22990$

1)  $\textcircled{m}_n$  bedeutet Bild  $m$ , Ablesebeispiel  $n$

$\textcircled{1}_2 \textcircled{2}_2$  Ablesung  $e^w = 0,350 + i0,407$   
Berechnung:  $e^w = 0,34875 + i0,40937$

$\textcircled{4}_2$  Ablesung:  $e^w = 0,342 - i0,315$   
Berechnung:  $e^w = 0,34406 - i0,31213$

$\textcircled{4}_4$  Ablesung  $e^w = 0,146 - i0,203$   
Berechnung:  $e^w = 0,14786 - i0,20065$

$$w = \ln \zeta, \quad \zeta = e^w$$

$$a) \quad c_1 = 0,75; c_2 = -1,5$$

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 10$$

$$b) \quad c_1 = 1,5; c_2 = -3,0$$

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 10$$



mit  $k_{\wp I}$  multipliziert. Hat man z. B. in Bild 1 oder 2 eine Ablesung für die angeschriebenen Werte  $x, y$ , so gehört hierzu  $\lambda = 1$ . Die analoge Ablesung in Bild 3 ist dann für die mit dem Graduierungsfaktor  $1/\sqrt{k_{\wp I}}$  multiplizierten Argumente vorzunehmen, und es ist zu beachten, daß  $e_2^* = k_{\wp I} e_1$  (s. 3.). Bild 5 ist aus der Tabelle 1 und den analogen Tabellen für  $\Delta_1 > 0$  entstanden. Zu  $\lambda^2 = 1$  gehört das in der Tabelle angeschriebene Wertepaar  $g_{20}, g_{30}$ . Die zu den übrigen Punkten einer Kurve  $k_{\wp}^2 = \text{const}^6$ ) gehörigen Wertepaare  $g_2, g_3$  berechnen sich aus

$$g_2 = \lambda^2 g_{20}, \quad g_3 = \lambda^3 g_{30} \quad (4,1).$$

Der zu einem Wertepaar  $g_2, k_{\wp}^2$  gehörige Wert von  $e_2$  ergibt sich im Falle **B** unmittelbar aus (3,6), im Falle **A** aus

$$12 e_2^2 = \frac{(1 - 2 k_{\wp}^2)^2}{1 - k_{\wp}^2 k_{\wp'}^2} g_2, \quad \text{sgn } e_2 = -\text{sgn } g_3, \quad e_2 \geq 0 \quad \text{für} \quad k_{\wp}^2 \geq 0,5 \quad (4,2).$$

Hierfür läßt sich ein Diagramm in Gestalt einer nach  $k_{\wp}^2$  bezifferten Schar von gewöhnlichen Parabeln anlegen.

### 5. Nomogramme zur Ermittlung von $\wp(z; g_2, g_3)$ aus $\ln [\wp(z; g_2, g_3) - e_2]$

Hat man nach 3. und 4. den Wert von (1,1) ermittelt, so gewinnt man hieraus den Wert  $\wp(z; g_2, g_3)$  selbst mit Hilfe eines Nomogramms für  $\sigma = s + i t = e^w$ . Nach dem in [1], 6. angegebenen Verfahren erhält man für ein solches Nomogramm die folgenden Skalengleichungen:

*s*-Skala:

$$\xi = 0, \quad \eta = g_1(s) = c_1 s^2 + d_1 \quad (5,1),$$

*t*-Skala:

$$\xi = c, \quad \eta = g_2(t) = c_2 t^2 + d_2 \quad (5,2),$$

*u*-Skala:

$$f_3(u) = \frac{c c_1}{c_1 + c_2}, \quad g_3(u) = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} e^{2u} + \frac{f_3}{c} (d_2 - d_1) + d_1 \quad (5,3),$$

*v*-Skala:

$$f_4(v) = \frac{c c_1}{c_1 - c_2 \text{tg}^2 v}, \quad g_4(v) = \frac{f_4}{c} (d_2 - d_1) + d_1 \quad (5,4).$$

Bilder 6a und 6b zeigen solche Nomogramme für zwei *u*-Ablesebereiche<sup>7)</sup>. Alle vier Skalenträger sind Geraden. Die Skalen für *s* und *t* sind parallel. (Nomogramme für zueinander senkrechte Skalen für *s* und *t* gewinnt man hieraus durch projektive Transformation.)

### 6. Die Mehrdeutigkeit der Ablesungen

Bei allen Fluchtliniennomogrammen für (1,1) ist die *v*-Skala nach  $\cos v$  beschriftet. Dies führt bis auf Vielfache von  $2\pi$  zu einer Doppeldeutigkeit der Ablesungen. Bei Nomogrammen mit vier reellen Grundpunkten ist auch die *u*-Ablesung doppeldeutig. Welcher von zwei möglichen Werten  $v, -v$  bzw.  $u, -u$  abzulesen ist, hängt von dem Wert der Argumente  $x$  und  $y$  ab. Die Skalen für  $x$  und  $y$  tragen eine abzählbar unendliche Folge von Beschriftungsziffern. Hiervon sind z. B. bei den Nomogrammen mit vier reellen Grundpunkten im Falle **A** wegen der Periodizität der  $\wp$ -Funktion die folgenden wesentlich verschieden:

*x*-Skala: vier wesentlich verschiedene Beschriftungsziffern  $x, \omega_1 - x, \omega_1 + x, 2\omega_1 - x$ ,

*y*-Skala: zwei wesentlich verschiedene Beschriftungsziffern  $y, 2|\omega_3| - y$ . Dabei bedeuten  $2\omega_1, 2\omega_3$  primitive Perioden der Funktion mit  $\omega_3/\omega_1 = \tau, \tau$  rein imaginär.

Bei den Nomogrammen mit zwei reellen Grundpunkten tragen sowohl die *x*- als auch die *y*-Skalen zwei wesentlich verschiedene Beschriftungsziffern  $x, 2\omega_1 - x$  bzw.  $y, 2|\omega_3| - y$ . Mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned} \wp(z + \omega_1) - e_2 &= 1/(\wp(z) - e_2) & \text{für} & \quad g_2^3 - 27 g_3^2 \geq 0 & \text{(Fall Ab und B)}, \\ \wp(z + \omega_3) - e_2 &= 1/(\wp(z) - e_2) & \text{für} & \quad g_2^3 - 27 g_3^2 < 0 & \text{(Fall B)}, \end{aligned}$$

$$\wp(z; g_2, g_3) = -\wp + \wp_- + \frac{1}{4} \frac{\wp'^2 - \wp_-'^2}{(\wp + \wp_-)^2} - \frac{i}{2} \frac{\wp' \wp_-'}{(\wp + \wp_-)^2} \quad (\text{Fälle Aa, Ab, B}),$$

( $\wp, \wp_-, \wp', \wp_-'$  vgl. bei (2,1), (2,2))

<sup>6)</sup> Im Falle **B** (Bilder 4 und 5 B) beziehen sich die angeschriebenen Werte  $k_{\wp}^2$  stets auf  $\lambda = 1$ .

<sup>7)</sup> Über Nomogramme, die für andere Ablesebereiche günstig sind vgl. [3] u. [4].

gelangt man für (1,1) zu der in *Tabelle 2* angegebenen Zuordnungsvorschrift der Werte von  $u$  und  $v$  zu den Werten von  $x$  und  $y$  und umgekehrt. Dabei ist zu beachten, daß im Falle **B**  $2\omega_1$  und  $2\omega_3$  keine primitiven Perioden bilden. Vielmehr hat die vom Rechteck mit den Seitenlängen  $2\omega_1$ ,  $2|\omega_3|$  gebildete Fläche den doppelten Flächeninhalt des von den primitiven Perioden gebildeten, dem Rechteck in seinen Seitenmitten einbeschriebenen Rhombus. — Für  $\sigma = e^w$  findet sich die entsprechende Tabelle in Bild 6.

Tabelle 2

		<i>x</i> -Intervall		<i>y</i> -Intervall	<i>u</i> -Ableitung		<i>v</i> -Ableitung
Aa	$\Delta_1 < 0$ $e_1 > e_2 > e_3$ $0 < k_p^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} < 1$	$-\omega_1 < x < 0$		$- \omega_3  < y < 0$ $0 < y <  \omega_3 $	eindeutig "		$-\pi < v < 0$ $0 < v < \pi$
		$0 < x < \omega_1$		$- \omega_3  < y < 0$ $0 < y <  \omega_3 $	eindeutig "		$0 < v < \pi$ $-\pi < v < 0$
Ab	$\Delta_1 > 0$ $e_2 > e_1 > e_3$ $k_p^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} > 1$	$\alpha)$ $0 < x < \frac{\omega_1}{2}$	$\beta)$ $\frac{\omega_1}{2} < x < \omega_1$	$\alpha) \text{ und } \beta)$ $0 < y <  \omega_3 $ $ \omega_3  < y < 2 \omega_3 $	$\alpha)$ $u > 0$ $u > 0$	$\beta)$ $u < 0$ $u < 0$	$-\pi < v < 0$ $0 < v < \pi$
		$\gamma)$ $\omega_1 < x < \frac{3\omega_1}{2}$	$\delta)$ $\frac{3\omega_1}{2} < x < 2\omega_1$	$\gamma) \text{ und } \delta)$ $0 < y <  \omega_3 $ $ \omega_3  < y < 2 \omega_3 $	$\gamma)$ $u < 0$ $u < 0$	$\delta)$ $u > 0$ $u > 0$	$0 < v < \pi$ $-\pi < v < 0$
B	$\Delta_1 > 0$ $e_1 = \mu + i\nu$ $e_2 = -2\mu$ $e_3 = \mu - i\nu$ $0 < k_p^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}e_2 < 1$ für $\Delta_1 = +16$	$\alpha)$ $0 < x < \frac{\omega_1}{2}$	$\beta)$ $\frac{\omega_1}{2} < x < \omega_1$	$\alpha) \text{ und } \beta)$ $0 < y < \frac{ \omega_3 }{2}$ $\frac{ \omega_3 }{2} < y <  \omega_3 $ $ \omega_3  < y < \frac{3 \omega_3 }{2}$ $\frac{3 \omega_3 }{2} < y < 2 \omega_3 $	$\alpha)$ $u > 0$ $u < 0$ $u < 0$ $u > 0$	$\beta)$ $u < 0$ $u > 0$ $u > 0$ $u < 0$	$-\pi < v < 0$ $-\pi < v < 0$ $0 < v < \pi$ $0 < v < \pi$
		$\gamma)$ $\omega_1 < x < \frac{3\omega_1}{2}$	$\delta)$ $\frac{3\omega_1}{2} < x < 2\omega_1$	$\gamma) \text{ und } \delta)$ $0 < y < \frac{ \omega_3 }{2}$ $\frac{ \omega_3 }{2} < y <  \omega_3 $ $ \omega_3  < y < \frac{3 \omega_3 }{2}$ $\frac{3 \omega_3 }{2} < y < 2 \omega_3 $	$\gamma)$ $u < 0$ $u > 0$ $u > 0$ $u < 0$	$\delta)$ $u > 0$ $u < 0$ $u < 0$ $u > 0$	$0 < v < \pi$ $0 < v < \pi$ $-\pi < v < 0$ $-\pi < v < 0$

Schlußbemerkung

Auf Grund der vorstehenden Untersuchungen werden in das in [2] genannte Nomogrammwerk auch die zur Ermittlung der Funktionswerte der  $\wp$ -Funktion erforderlichen Nomogrammbätter aufgenommen.

In den meisten Bildern der vorstehenden Arbeit sind Ablesebeispiele eingetragen und zum Vergleich die mit Hilfe einer Tafel errechneten Funktionswerte angegeben. Die hier erreichte Ablesegenauigkeit läßt sich für das Nomogrammwerk durch Darstellung in großem Maßstab sowie zeichen- und reproduktionstechnische Maßnahmen noch beträchtlich steigern.

Frau Stud. Ass. E. HAUPT danke ich für die Unterstützung bei den vorstehenden theoretischen Untersuchungen sowie bei der Berechnung und Konstruktion aller Bilder.

Zu den vorstehenden Untersuchungen erforderliche elektronische Rechnungen konnten durch das freundliche Entgegenkommen der IBM ausgeführt werden.

Literatur

[1] F. REUTTER, Zamm 40 (1960), S. 75—93.  
[2] F. REUTTER, Zamm 40 (1960), S. 433—448, 529—541.  
[3] J. RYBNER, Nomograms of Complex Hyperbolic Functions; 2nd. edition, Copenhagen 1955.  
[4] F. REUTTER, Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 912, 1960.

Manuskripteingang: 11. 4. 1960

Anschrift: Prof. Dr. F. REUTTER, Math. Inst. der TH. Aachen, Lehrstuhl B, Aachen, Templergraben 55



# Ein Variationsprinzip in der Hydrodynamik

Von D. RÜDIGER

*Es wird ein Variationsprinzip aufgestellt, das der dritten Randwertaufgabe der linearisierten Navier-Stokes'schen Differentialgleichungen für stationäre Bewegungen äquivalent ist. Dabei ist an die benachbarten Geschwindigkeitsfelder nur die Forderung zu stellen, daß die Kontinuitätsgleichung erfüllt wird.*

*A variational principle is established which is equivalent to the third boundary-value problem of the linearized Navier-Stokes differential equations for stationary flow. The only conditions to be fulfilled is that the adjacent velocity fields satisfy the continuity equation.*

В работе устанавливается вариационный принцип, равносильный третьей краевой задаче для линеаризованного дифференциального уравнения Навье-Стокса, описывающего установившееся движение. От соседних полей скоростей требуется лишь, чтобы они удовлетворяли уравнению непрерывности.

## 1. Einleitung

Im folgenden soll ein Variationsprinzip für alle die stationären Bewegungsvorgänge reibender und inkompressibler Flüssigkeiten aufgestellt werden, bei denen die „nichtlinearen“ Beschleunigungskräfte gegenüber den Reibungskräften vernachlässigt werden können. Das Ziel ist dabei, das einer allgemeinen Randwertaufgabe äquivalente Variationsprinzip so zu finden, daß die zum Vergleich zugelassenen Funktionen in allen Randpunkten eines von Flüssigkeit erfüllten Raumes beliebige Werte annehmen dürfen. Dann ist es nämlich möglich, mit willkürlichen Partikularlösungen der linearisierten NAVIER-STOKES'schen Differentialgleichungen die TREFFTZ'sche Methode<sup>1)</sup> der Entwicklung nach partikulären Lösungen anzuwenden.

Zur Ableitung des Variationsprinzips wird die Darstellung der Grundgleichungen in allgemeinen Koordinaten

$$\sigma^{\lambda\mu}|_{\lambda} + \varrho b^{\mu} = 0 \quad \dots \dots \dots (1_1)$$

$$\sigma^{\lambda\mu} = -p g^{\lambda\mu} + \eta (v^{\lambda}|^{\mu} + v^{\mu}|^{\lambda}) \quad \dots \dots \dots (1_2)$$

$$v^{\lambda}|_{\lambda} = 0 \quad \dots \dots \dots (1_3)$$

verwendet. Hierin sind  $\sigma^{\lambda\mu}$ ,  $g^{\lambda\mu}$ ,  $v^{\lambda}$  und  $b^{\lambda}$  die kontravarianten Koordinaten des Spannungstensors, des Maßtensors, des Geschwindigkeitsvektors und des Vektors der Massenkraft. Der Druck, die Dichte und die dynamische Zähigkeit sind durch  $p$ ,  $\varrho$  und  $\eta$  gekennzeichnet. Der senkrechte Strich gibt die ko- bzw. kontravariante Differentiation an. Sind  $n_{\lambda}$  die kovarianten Koordinaten des Normalenvektors der Oberfläche  $F$  des Bereiches, dann ist ihr Spannungsvektor durch

$$t^{\mu} = \sigma^{\lambda\mu} n_{\lambda} \quad \dots \dots \dots (2)$$

festgelegt<sup>2)</sup>.

## 2. Variationsprinzip

Ein mit Flüssigkeit erfüllter Bereich  $R$  unterliegt der Massenkraft  $b^{\lambda}(x^1, x^2, x^3)$  und ist Randbedingungen derart unterworfen, daß auf den Teilflächen  $\bar{G}^1, \bar{G}^2, \bar{G}^3$  die Flächenkräfte  $\bar{t}^1, \bar{t}^2, \bar{t}^3$  und auf den Teilflächen  $\bar{G}^1, \bar{G}^2, \bar{G}^3$  die Geschwindigkeiten  $\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{v}^3$  vorgegeben sind. Es ist dann

$$\bar{G}^1 + \bar{G}^2 = F, \quad \bar{G}^2 + \bar{G}^3 = F, \quad \bar{G}^3 + \bar{G}^1 = F.$$

<sup>1)</sup> E. TREFFTZ, Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren, Verh. 2. Intern. Kongr. f. Techn. Mech. Zürich 1926, S. 131.

<sup>2)</sup>  $x^{\lambda}, x^{\mu}, x^{\nu}$  ( $\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3$ ) sind allgemeine Koordinaten. Es gilt das Summationsübereinkommen

$$\sum_{\lambda=1}^3 A^{\lambda} B_{\lambda} = A^{\lambda} B_{\lambda}.$$

Mit den CHRISTOFFEL'schen Dreiindizesymbolen zweiter Art

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right)$$

lauten die ko- und kontravarianten Differentiationen

$$v^{\lambda}|_{\mu} = \frac{\partial v^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} v^{\rho}, \quad \sigma^{\lambda\mu}|_{\lambda} = \frac{\partial \sigma^{\lambda\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda} \sigma^{\rho\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho} \sigma^{\lambda\rho}, \quad v^{\lambda}|^{\mu} = v^{\lambda}|_{\nu} g^{\nu\mu}.$$

Zur Formulierung des Variationsprinzips wird aus den Gleichgewichtsbedingungen (1<sub>1</sub>) und einem virtuellen Geschwindigkeitsfeld  $\delta v^\lambda$ , für das die Kontinuitätsgleichung

$$\delta v^\lambda{}_{;\lambda} = 0 \quad . . . . . (3)$$

gelten möge, die verschwindende Leistung

$$\delta N = - \iiint_R (\sigma^{\lambda\mu}{}_{;\lambda} + \varrho b^\mu) \delta v_\mu dV = 0 \quad . . . . . (4_1)$$

gebildet. Führt man hierin die Identität

$$\sigma^{\lambda\mu}{}_{;\lambda} \delta v_\mu = (\sigma^{\lambda\mu} \delta v_\mu)_{;\lambda} - \sigma^{\lambda\mu} \delta v_{\mu;\lambda}$$

ein, dann ergibt sich

$$\delta N = \iiint_R \sigma^{\lambda\mu} \delta v_{\mu;\lambda} dV - \iiint_R (\sigma^{\lambda\mu} \delta v_\mu)_{;\lambda} dV - \iiint_R \varrho b^\mu \delta v_\mu dV = 0 \quad . . . . . (4_2).$$

Für den Integranden des ersten Volumenintegrals kann mit (1<sub>2</sub>), (3) und (1<sub>3</sub>)

$$\begin{aligned} \sigma^{\lambda\mu} \delta v_{\mu;\lambda} &= [-p g^{\lambda\mu} + \varrho \eta (v^\lambda{}_{;\mu} + v^\mu{}_{;\lambda})] \delta v_{\mu;\lambda} = -p \delta v^\lambda{}_{;\lambda} + \varrho \eta (v^\lambda{}_{;\mu} \delta v_{\mu;\lambda} + v^\mu{}_{;\lambda} \delta v_{\mu;\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} \delta [\varrho \eta (v^\lambda{}_{;\mu} + v^\mu{}_{;\lambda}) v_{\mu;\lambda}] = \frac{1}{2} \delta (\sigma^{\lambda\mu} v_{\mu;\lambda}) \end{aligned}$$

geschrieben werden. Beachtet man noch die wegen (1<sub>1</sub>) gültige Beziehung

$$\sigma^{\lambda\mu} v_{\mu;\lambda} = (\sigma^{\lambda\mu} v_\mu)_{;\lambda} + \varrho b^\mu v_\mu,$$

so folgt schließlich

$$\sigma^{\lambda\mu} \delta v_{\mu;\lambda} = \frac{1}{2} \delta [(\sigma^{\lambda\mu} v_\mu)_{;\lambda} + \varrho b^\mu v_\mu].$$

Für die Leistung  $\delta N$  erhält man damit

$$\begin{aligned} \delta N &= \frac{1}{2} \iiint_R \delta (\sigma^{\lambda\mu} v_\mu)_{;\lambda} dV + \frac{\varrho}{2} \iiint_R \delta (b^\mu v_\mu) dV - \\ &- \iiint_R (\sigma^{\lambda\mu} \delta v_\mu)_{;\lambda} dV - \varrho \iiint_R b^\mu \delta v_\mu dV = 0 \quad . . . . . (5_1). \end{aligned}$$

Die Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes

$$\iiint_R (\quad)_{;\lambda} dV = \iint_F (\quad) n_\lambda df$$

auf das erste und dritte Volumenintegral in (5<sub>1</sub>) liefert

$$\begin{aligned} \delta N &= \frac{1}{2} \iint_F \delta (\sigma^{\lambda\mu} v_\mu) n_\lambda df + \frac{\varrho}{2} \iiint_R \delta (b^\mu v_\mu) dV - \\ &- \iint_F (\sigma^{\lambda\mu} \delta v_\mu) n_\lambda df - \varrho \iiint_R b^\mu \delta v_\mu dV = 0 \quad . . . . . (5_2). \end{aligned}$$

Mit dem Spannungsvektor (2) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \delta N &= \frac{1}{2} \iint_F \delta (t^\mu v_\mu) df + \frac{\varrho}{2} \iiint_R \delta (b^\mu v_\mu) dV - \\ &- \iint_F t^\mu \delta v_\mu df - \varrho \iiint_R b^\mu \delta v_\mu dV = 0 \quad . . . . . (5_3). \end{aligned}$$

Wenn in (5<sub>3</sub>) die Integrale über die Oberfläche durch die Gebietsintegrale über  $\frac{1}{G}$ ,  $\frac{2}{G}$ ,  $\frac{3}{G}$  und  $\frac{1}{G}$ ,  $\frac{2}{G}$ ,  $\frac{3}{G}$  ersetzt werden, so folgt

$$\begin{aligned} \delta N = & \frac{1}{2} \int \int_{\frac{1}{G}} \delta(t^1 v_1) df + \frac{1}{2} \int \int_{\frac{2}{G}} \delta(t^2 v_2) df + \frac{1}{2} \int \int_{\frac{3}{G}} \delta(t^3 v_3) df + \\ & + \frac{1}{2} \int \int_{\frac{1}{G}} \delta(t^1 v_1) df + \frac{1}{2} \int \int_{\frac{2}{G}} \delta(t^2 v_2) df + \frac{1}{2} \int \int_{\frac{3}{G}} \delta(t^3 v_3) df - \\ & \int \int_{\frac{1}{G}} t^1 \delta v_1 df - \int \int_{\frac{2}{G}} t^2 \delta v_2 df - \int \int_{\frac{3}{G}} t^3 \delta v_3 df - \\ & \int \int_{\frac{1}{G}} t^1 \delta v_1 df - \int \int_{\frac{2}{G}} t^2 \delta v_2 df - \int \int_{\frac{3}{G}} t^3 \delta v_3 df + \\ & + \frac{\rho}{2} \int \int \int_R \delta(b^\mu v_\mu) dV - \rho \int \int \int_R b^\mu \delta v_\mu dV = 0 \quad \dots \dots \dots (5_4). \end{aligned}$$

Führt man hierin die Identitäten

$$t^1 \delta v_1 = \delta(t^1 v_1) - \delta t^1 v_1, \quad t^2 \delta v_2 = \delta(t^2 v_2) - \delta t^2 v_2, \quad t^3 \delta v_3 = \delta(t^3 v_3) - \delta t^3 v_3$$

ein, dann erhält man zunächst

$$\begin{aligned} \delta N = & \frac{1}{2} \int \int_{\frac{1}{G}} \delta(t^1 v_1) df + \frac{1}{2} \int \int_{\frac{2}{G}} \delta(t^2 v_2) df + \frac{1}{2} \int \int_{\frac{3}{G}} \delta(t^3 v_3) df + \\ & + \frac{1}{2} \int \int_{\frac{1}{G}} \delta(t^1 v_1) df + \frac{1}{2} \int \int_{\frac{2}{G}} \delta(t^2 v_2) df + \frac{1}{2} \int \int_{\frac{3}{G}} \delta(t^3 v_3) df - \\ & - \int \int_{\frac{1}{G}} t^1 \delta v_1 df - \int \int_{\frac{2}{G}} t^2 \delta v_2 df - \int \int_{\frac{3}{G}} t^3 \delta v_3 df - \\ & \int \int_{\frac{1}{G}} \delta(t^1 v_1) df - \int \int_{\frac{2}{G}} \delta(t^2 v_2) df - \int \int_{\frac{3}{G}} \delta(t^3 v_3) df + \\ & + \int \int_{\frac{1}{G}} \delta t^1 v_1 df + \int \int_{\frac{2}{G}} \delta t^2 v_2 df + \int \int_{\frac{3}{G}} \delta t^3 v_3 df + \\ & + \frac{\rho}{2} \int \int \int_R \delta(b^\mu v_\mu) dV - \rho \int \int \int_R b^\mu \delta v_\mu dV = 0 \end{aligned}$$

und nach Zusammenfassung

$$\begin{aligned} \delta N = & \frac{1}{2} \int \int_{\frac{1}{G}} \delta(t^1 v_1) df + \frac{1}{2} \int \int_{\frac{2}{G}} \delta(t^2 v_2) df + \frac{1}{2} \int \int_{\frac{3}{G}} \delta(t^3 v_3) df - \\ & - \frac{1}{2} \int \int_{\frac{1}{G}} \delta(t^1 v_1) df - \frac{1}{2} \int \int_{\frac{2}{G}} \delta(t^2 v_2) df - \frac{1}{2} \int \int_{\frac{3}{G}} \delta(t^3 v_3) df - \\ & - \int \int_{\frac{1}{G}} t^1 \delta v_1 df - \int \int_{\frac{2}{G}} t^2 \delta v_2 df - \int \int_{\frac{3}{G}} t^3 \delta v_3 df + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{1}{G}} \delta t^1 v_1 df + \int_{\frac{2}{G}} \delta t^2 v_2 df + \int_{\frac{3}{G}} \delta t^3 v_3 df + \\
& - \frac{\rho}{2} \int_R \delta (b^\mu v_\mu) dV - \rho \int_R b^\mu \delta v_\mu dV = 0 \quad \dots \dots \dots (5_5).
\end{aligned}$$

Da nun auf den Teilerflächen  $\frac{1}{G}, \frac{2}{G}, \frac{3}{G}$  die Flächenkräfte  $\bar{t}^1, \bar{t}^2, \bar{t}^3$ , auf den Teilerflächen  $\frac{1}{G}, \frac{2}{G}, \frac{3}{G}$  die Geschwindigkeiten  $\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{v}^3$  und für den betrachteten Bereich die Massenkraft  $\bar{b}^\mu$  fest vorgegeben sind, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\delta N = & \delta \left[ \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{G}} (t^1 - 2 \bar{t}^1) v_1 df - \frac{1}{2} \int_{\frac{2}{G}} (t^2 - 2 \bar{t}^2) v_2 df + \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{G}} (t^3 - 2 \bar{t}^3) v_3 df - \right. \\
& - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{G}} t^1 (v_1 - 2 \bar{v}_1) df - \frac{1}{2} \int_{\frac{2}{G}} t^2 (v_2 - 2 \bar{v}_2) df - \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{G}} t^3 (v_3 - 2 \bar{v}_3) df + \\
& \left. + \frac{\rho}{2} \int_R (b^\mu - 2 \bar{b}^\mu) v_\mu dV \right] = 0,
\end{aligned}$$

woraus das gesuchte Variationsprinzip zu

$$\begin{aligned}
N = & \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{G}} (t^1 - 2 \bar{t}^1) v_1 df + \frac{1}{2} \int_{\frac{2}{G}} (t^2 - 2 \bar{t}^2) v_2 df + \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{G}} (t^3 - 2 \bar{t}^3) v_3 df - \\
& - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{G}} t^1 (v_1 - 2 \bar{v}_1) df - \frac{1}{2} \int_{\frac{2}{G}} t^2 (v_2 - 2 \bar{v}_2) df - \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{G}} t^3 (v_3 - 2 \bar{v}_3) df + \\
& - \frac{\rho}{2} \int_R (b^\mu - 2 \bar{b}^\mu) v_\mu dV = \text{Extrem.} \quad \dots \dots \dots (6)
\end{aligned}$$

folgt. Es besagt, daß von allen möglichen Geschwindigkeitsfeldern eines Bereiches  $R$ , die auf dessen Oberfläche  $F$  beliebige Werte haben können, dasjenige eintritt, das den Ausdruck (6) zu einem Extremum werden läßt. Man kann also zur numerischen Darstellung der Lösung  $v^i(x^1, x^2, x^3)$  einer beliebig vorgegebenen Randwertaufgabe der linearisierten NAVIER-STOKESschen Gleichung für stationäre Bewegungen im Sinne von W. RITZ einen Ansatz

$$v^i = \sum_{r=1}^n \check{c}^r \check{q}^r, \quad p = \sum_{\kappa=1}^m \check{k}^\kappa \check{\pi}^\kappa \quad \dots \dots \dots (7_1)$$

machen. Die Funktionen  $\check{q}^r$  müssen dabei die Kontinuitätsgleichungen

$$\check{q}^{\lambda|}_{|\lambda} = 0$$

erfüllen und sind zusammen mit den Funktionen  $\check{\pi}^\kappa$  so allgemein auszuwählen, daß bei hinreichend großen  $n, m$  und passend gewählten Koeffizienten  $\check{c}^r, \check{k}^\kappa$  die Lösung des vorgegebenen Randwertproblems mit beliebiger Genauigkeit dargestellt werden kann.

Mit dem Ansatz (7<sub>1</sub>) erhält man für den Spannungstensor, den Spannungsvektor und die Massenkraft

$$\check{\sigma}^{\lambda\mu} = -g^{\lambda\mu} \sum_{\kappa=1}^m \check{k}^\kappa \check{\pi}^\kappa + \rho \eta \sum_{r=1}^n \check{c}^r (\check{q}^{\lambda|\mu} + \check{q}^{\mu|\lambda}) \quad \dots \dots \dots (7_2),$$

$$\check{t}^\mu = \check{\sigma}^{\lambda\mu} n_\lambda = -n^\mu \sum_{\kappa=1}^m \check{k}^\kappa \check{\pi}^\kappa + \rho \eta \sum_{r=1}^n \check{c}^r (\check{q}^{\lambda|\mu} + \check{q}^{\mu|\lambda}) n_\lambda \quad \dots \dots \dots (7_3),$$

$$\check{b}^\mu = -\frac{1}{\rho} \check{\sigma}^{\lambda\mu}_{|\lambda} = -\frac{1}{\rho} \sum_{\kappa=1}^m \check{k}^\kappa \check{\pi}^\kappa_{|\lambda} - \eta \sum_{r=1}^n \check{c}^r \Delta \check{q}^{\mu r} \quad \dots \dots \dots (7_4).$$

Die Koeffizienten  $\check{c} (v = 1, 2, \dots, n)$ ,  $\check{k} (\kappa = 1, 2, \dots, m)$  werden nunmehr so bestimmt, daß die mit (7) gebildete Leistung

$$\begin{aligned} N^* = & \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\check{G}}} \int \left( \check{t}^1 - 2 \bar{t}^1 \right) \check{v}_1 df + \frac{1}{2} \int_{\frac{2}{\check{G}}} \int \left( \check{t}^2 - 2 \bar{t}^2 \right) \check{v}_2 df + \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{\check{G}}} \int \left( \check{t}^3 - 2 \bar{t}^3 \right) \check{v}_3 df - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\check{G}}} \int \check{t}^1 (\check{v}_1 - 2 \bar{v}_1) df - \frac{1}{2} \int_{\frac{2}{\check{G}}} \int \check{t}^2 (\check{v}_2 - 2 \bar{v}_2) df - \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{\check{G}}} \int \check{t}^3 (\check{v}_3 - 2 \bar{v}_3) df + \\ & + \frac{\rho}{2} \int_{\check{K}} \int \int \left( \check{b}^\mu - 2 \bar{b}^\mu \right) \check{v}_\mu dV \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

dem Extremum möglichst nahe kommt. Die Bedingungsgleichungen für das Eintreten des Extremwertes lauten

$$\frac{\partial N^*}{\partial \check{c}} = 0, \quad \frac{\partial N^*}{\partial \check{k}} = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n; \kappa = 1, 2, \dots, m) \dots \dots \dots (9)$$

und haben die GALERKINSche Form.

Um eine andere Form des Extremalprinzips (6) zu erhalten, wird das die Massenkraft  $b^\mu$  enthaltende Volumenintegral mittels der Identität

$$\rho b^\mu v_\mu = \sigma^{\lambda\mu} v_{\mu|\lambda} - (\sigma^{\lambda\mu} v_\mu)_{|\lambda}$$

zunächst durch

$$\frac{\rho}{2} \int_{\check{K}} \int \int b^\mu v_\mu dV = \frac{1}{2} \int_{\check{K}} \int \int \sigma^{\lambda\mu} v_{\mu|\lambda} dV - \frac{1}{2} \int_{\check{K}} \int \int (\sigma^{\lambda\mu} v_\mu)_{|\lambda} dV$$

ersetzt. Die Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes auf das zweite Integral der rechten Seite liefert bei Beachtung von (2)

$$\frac{\rho}{2} \int_{\check{K}} \int \int b^\mu v_\mu dV = \frac{1}{2} \int_{\check{K}} \int \int \sigma^{\lambda\mu} v_{\mu|\lambda} dV - \frac{1}{2} \int_{\check{F}} \int t^\mu v_\mu df,$$

und daraus folgt mit  $F = \frac{1}{\check{G}} + \frac{1}{\check{G}}$ ,  $F = \frac{2}{\check{G}} + \frac{2}{\check{G}}$  und  $F = \frac{3}{\check{G}} + \frac{3}{\check{G}}$  die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \int_{\check{K}} \int \int b^\mu v_\mu dV = & \frac{1}{2} \int_{\check{K}} \int \int \sigma^{\lambda\mu} v_{\mu|\lambda} dV - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\check{G}}} \int t^1 v_1 df - \frac{1}{2} \int_{\frac{2}{\check{G}}} \int t^2 v_2 df - \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{\check{G}}} \int t^3 v_3 df - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\check{G}}} \int t^1 v_1 df - \frac{1}{2} \int_{\frac{2}{\check{G}}} \int t^2 v_2 df - \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{\check{G}}} \int t^3 v_3 df \dots \dots \dots (10). \end{aligned}$$

Wird (10) in (6) eingesetzt, so erhält man das Variationsprinzip in der Form

$$\begin{aligned} N = & \frac{1}{2} \int_{\check{K}} \int \int \sigma^{\lambda\mu} v_{\mu|\lambda} dV - \frac{\rho}{2} \int_{\check{K}} \int \int b^\mu v_\mu dV - \int_{\frac{1}{\check{G}}} \int t^1 v_1 df - \int_{\frac{2}{\check{G}}} \int t^2 v_2 df - \int_{\frac{3}{\check{G}}} \int t^3 v_3 df - \\ & - \int_{\frac{1}{\check{G}}} \int t^1 (v_1 - \bar{v}_1) df - \int_{\frac{2}{\check{G}}} \int t^2 (v_2 - \bar{v}_2) df - \int_{\frac{3}{\check{G}}} \int t^3 (v_3 - \bar{v}_3) df = \text{Extrem.} \dots (11). \end{aligned}$$

Das Volumenintegral

$$\frac{1}{2} \int_{\check{K}} \int \int \sigma^{\lambda\mu} v_{\mu|\lambda} dV \dots \dots \dots (12)$$

ist dabei die bei der stationären Strömung im betrachteten Bereich in der Zeiteinheit verrichtete Deformationsarbeit. Das Variationsprinzip (11) bringt also zum Ausdruck, daß die Differenz

der in der Zeiteinheit verrichteten Deformationsarbeit (12) und die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit

$$\varrho \iiint_R \bar{b}^\mu v_\mu dV + \iint_{\frac{1}{G}} \bar{t}^1 v_1 df + \iint_{\frac{2}{G}} \bar{t}^2 v_2 df + \iint_{\frac{3}{G}} \bar{t}^3 v_3 df + \\ + \iint_{\frac{1}{G}} t^1 (v_1 - \bar{v}_1) df + \iint_{\frac{2}{G}} t^2 (v_2 - \bar{v}_2) df + \iint_{\frac{3}{G}} t^3 (v_3 - \bar{v}_3) df$$

der Massen- und Oberflächenkräfte einen Extremwert annimmt. Mit der aus (10) folgenden Identität

$$- \iint_{\frac{1}{G}} t^1 v_1 df - \iint_{\frac{2}{G}} t^2 v_2 df - \iint_{\frac{3}{G}} t^3 v_3 df = - \iiint_R \sigma^{\lambda\mu} v_{\mu|\lambda} dV + \\ + \varrho \iiint_R \bar{b}^\mu v_\mu dV + \iint_{\frac{1}{G}} t^1 v_1 df + \iint_{\frac{2}{G}} t^2 v_2 df + \iint_{\frac{3}{G}} t^3 v_3 df$$

kann das Extremalprinzip auch durch

$$-N = \frac{1}{2} \iiint_R \sigma^{\lambda\mu} v_{\mu|\lambda} dV - \varrho \iiint_R (b^\mu - \bar{b}^\mu) v_\mu dV - \\ - \iint_{\frac{1}{G}} (t^1 - \bar{t}^1) v_1 df - \iint_{\frac{2}{G}} (t^2 - \bar{t}^2) v_2 df - \iint_{\frac{3}{G}} (t^3 - \bar{t}^3) v_3 df - \\ - \iint_{\frac{1}{G}} t^1 \bar{v}_1 df - \iint_{\frac{2}{G}} t^2 \bar{v}_2 df - \iint_{\frac{3}{G}} t^3 \bar{v}_3 df = \text{Extrem.} \quad (13)$$

dargestellt werden.

### 3. Verfahren von Trefftz

Beim TREFFTZschen Verfahren wird der Ansatz

$$\bar{v}^\lambda = \sum_{\nu=1}^n \bar{c}^\nu \bar{\varphi}^\lambda, \quad \bar{p} = \sum_{\nu=1}^n \bar{c}^\nu \bar{\pi} \quad (14)$$

verwendet, wobei die Funktionen  $\bar{\varphi}^\lambda, \bar{\pi}$  Partikularlösungen der homogenen Grundgleichungen (1) sind und entsprechend dem Variationsprinzip (6) auf der Oberfläche beliebige Werte annehmen können. Bildet man mit (14) die Koordinaten des Spannungstensors  $\bar{\sigma}^{\lambda\mu}$  und des Spannungsvektors  $\bar{t}^\lambda$ , so ergeben sich mit

$$\bar{s}^{\lambda\mu} = -\bar{\pi} g^{\lambda\mu} + \varrho \eta (\bar{\varphi}^{\lambda|\mu} + \bar{\varphi}^{\mu|\lambda})$$

und

$$\bar{\tau}^\mu = \bar{s}^{\lambda\mu} n_\lambda$$

die Beziehungen

$$\bar{\sigma}^{\lambda\mu} = \sum_{\nu=1}^n \bar{c}^\nu \bar{s}^{\lambda\mu}, \quad \bar{t}^\lambda = \sum_{\nu=1}^n \bar{c}^\nu \bar{\tau}^\lambda \quad (15_1).$$

Da voraussetzungsgemäß die Funktionen  $\bar{\varphi}^\lambda, \bar{\pi}$  Partikularlösungen der homogenen Grundgleichungen (1) sind, ist

$$\bar{s}^{\lambda\mu|_\lambda} = 0 \quad (15_2).$$

Die Konstanten  $\bar{c}^\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) des Ansatzes (14) sind nun so zu bestimmen, daß der Ausdruck

$$N = \frac{1}{2} \iint_{\frac{1}{G}} (\bar{t}^1 - 2 \bar{t}^1) \bar{v}_1 df + \frac{1}{2} \iint_{\frac{2}{G}} (\bar{t}^2 - 2 \bar{t}^2) \bar{v}_2 df + \frac{1}{2} \iint_{\frac{3}{G}} (\bar{t}^3 - 2 \bar{t}^3) \bar{v}_3 df - \\ - \frac{1}{2} \iint_{\frac{1}{G}} \bar{t}^1 (\bar{v}_1 - 2 \bar{v}_1) df - \frac{1}{2} \iint_{\frac{2}{G}} \bar{t}^2 (\bar{v}_2 - 2 \bar{v}_2) df - \frac{1}{2} \iint_{\frac{3}{G}} \bar{t}^3 (\bar{v}_3 - 2 \bar{v}_3) df - \\ - \varrho \iiint_R \bar{b}^\mu \bar{v}_\mu dV$$



einen Extremwert annimmt. Als Bestimmungsgleichungen erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial c} = 0 = & \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{G}} \left( \bar{v}_1^v \bar{v}_1^n + \bar{l}_1^v \bar{\varphi}_1^n - 2 \bar{l}_1^v \bar{\varphi}_1^v \right) df + \frac{1}{2} \int_{\frac{2}{G}} \left( \bar{v}_2^v \bar{v}_2^n + \bar{l}_2^v \bar{\varphi}_2^n - 2 \bar{l}_2^v \bar{\varphi}_2^v \right) df + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{G}} \left( \bar{v}_3^v \bar{v}_3^n + \bar{l}_3^v \bar{\varphi}_3^n - 2 \bar{l}_3^v \bar{\varphi}_3^v \right) df - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{G}} \left( \bar{v}_1^v \bar{v}_1^n + \bar{l}_1^v \bar{\varphi}_1^n - 2 \bar{v}_1^v \bar{v}_1^v \right) df - \frac{1}{2} \int_{\frac{2}{G}} \left( \bar{v}_2^v \bar{v}_2^n + \bar{l}_2^v \bar{\varphi}_2^n - 2 \bar{v}_2^v \bar{v}_2^v \right) df - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{G}} \left( \bar{v}_3^v \bar{v}_3^n + \bar{l}_3^v \bar{\varphi}_3^n - 2 \bar{v}_3^v \bar{v}_3^v \right) df - \varrho \iint_R \bar{b}_\mu^v \bar{\varphi}_\mu^v dV \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad (16). \end{aligned}$$

Manuskripteingang: 11. 4. 1960

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. D. RÜDIGER, Freiberg (Sachs.), Straße der Einheit 12

ZAMM 41 (1961) Heft 1/2, Seite 72—86

## Zur Dynamik des Preßlufthammers\*)

Von H. NEUBER

Für die Berechnung der Bewegungsvorgänge in Preßlufthämmern wird ein Vier-Massen-System als dynamisches Modell eingeführt, bestehend aus: Hammergehäuse, Kolben, Meißel und Handgriff. Es sind zwei periodische Stoßvorgänge zu berücksichtigen: 1. Kolben gegen Meißel, 2. Hammerkörper gegen Meißel (Meißelbund). Dämpfungen werden vernachlässigt. Ausgehend von einer Fourier-Entwicklung der Luftdruck-Zeit-Funktion wird eine Theorie aufgestellt, welche die exakten Weg-Zeit-Funktionen der Massen liefert. Der beruhigende Einfluß einer zusätzlichen Abfederung des Handgriffs wird an einigen Spezialfällen, sowie im allgemeinen Fall diskutiert.

In order to solve the dynamical problem of pneumatic hammers a system of four masses is introduced as a dynamical model, consisting of: Hammer-body, piston, chisel and handle. There are to be respected two periodical impact-effects: 1. Piston against chisel, 2. hammerbody against chisel (chisel-shoulder). Damping effects are neglected. Starting from a Fourier series of the air pressure-time function a theory is established, which gives the exact velocity-time functions of the masses in an explicit form. The calming down influence of an additional spring between handle and hammer-body is discussed in some special cases and also in the general case.

Для установления закона движения в пневматическом молотке в качестве динамической модели вводится система четырех масс, а именно: корпус молотка, поршень, резец, ручка. Рассматриваются два преиодических процесса: 1. поршень толкает резец, 2. корпус молотка толкает резец. Затухание не учитывается. Исходя из разложения в ряд ФУРЬЕ функции, выражающей зависимость давления от времени, устанавливается теория, которая дает точный закон движения масс в зависимости от времени. В некоторых частных, а также в общем случае рассматривается затухание, вызванное дополнительной пружиной между ручкой и корпусом.

### 1. Einführung

Die bisher zur Klärung der Bewegungsvorgänge in Preßlufthämmern unternommenen wissenschaftlichen Untersuchungen sind sehr spärlich. In einer Arbeit von J. PERTHEN: („Die Probleme am Preßluft- und Explosionshammer“, Dissertation Dresden 1937), welche auch eine ausführliche Literaturübersicht enthält, wird über Messungen des Druckverlaufes im Zylinder berichtet. In theoretischer Hinsicht liegen nur Näherungsrechnungen von J. MAERCKS vor (Bergbaumechanik 3. Auflage, Springer Verlag 1950, ferner „Glückauf“ 1927, S. 12—19), welche starke Vernachlässigungen enthalten.

In vorliegender Arbeit wird auf Grund der Tatsache, daß der Vorgang seinem wesentlichen Charakter nach periodisch ist, mit Hilfe eines Viermassensystems als Gedankenmodell eine Berechnungsmethode angegeben, welche den dynamischen und kinematischen Bedingungen des Problems gerecht wird. Die vier, in relativer Translationsbewegung zueinander befindlichen Massen sind: Hammerkörper, Kolben, Meißel und Handgriff (durch Berücksichtigung einer Abfederung des Handgriffes wird auch die Möglichkeit einer Rückstoßminderung in Betracht

\*) Vortrag, gehalten auf der wissenschaftlichen Jahrestagung 1960 der GAMM in Freiberg/Sa.

gezogen). Die über Steuerorgane wirkende periodische Kraft des Luftdruckes wird als Fourier-Reihe eingeführt. Die Bewegungsgleichungen des Systems liefern dann für die Koordinaten der einzelnen Massen außer linearen und quadratischen Gliedern ebenfalls Fourier-Reihen, wobei zwei Stoßvorgänge zu berücksichtigen sind: 1) Stoß Kolben auf Meißel, 2) Stoß Hammerkörper auf Meißelbund. Die zugehörigen beiden Zeitpunkte sind Sprungstellen der Geschwindigkeitsfunktionen von Kolben bzw. Hammerkörper; zur Formulierung der entsprechenden Bedingungen werden Stoßzahlen verwendet. Die Ergebnisse werden anhand von Zahlenbeispielen und Diagrammen diskutiert.

## 2. Aufstellung neuer Ausgangsgleichungen

Bei Auffassung des Hammers als mechanisches System müssen folgende Massen unterschieden werden (Bilder 1—3):

- $m_1$  Masse des Handgriffes und der unmittelbar mit ihm starr verbundenen Teile
- $m_2$  Masse des Hammers ohne Handgriff, Kolben und Meißel
- $m_3$  Masse des Kolbens
- $m_4$  Masse des Meißels

Die Unterteilung des Hammers in Handgriff und eigentlichen Hammerkörper war erforderlich, um den Einbau einer Zusatzfeder berücksichtigen zu können. Betrachtet man die beim Hinweg (Bild 2) des Kolbens wirkenden Kräfte, so wird auf die Masse  $m_2$  durch den Gasdruck die gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Kraft ausgeübt wie auf die Kolbenmasse  $m_3$ . Beim Rückweg (Bild 3) dagegen wirkt der Gasdruck mit einer bestimmten Kraft auf die andere Seite des Kolbens; die zugehörige Reaktionskraft wirkt in entgegengesetzter Richtung, also im Sinne der Arbeitsweise des Hammers auf den Meißelquerschnitt und den Ringquerschnitt des Zylinderverschlusses und damit auch auf den Hammer. Es ist also hierbei die auf den Hammer wirkende Kraft kleiner als die Kolbenkraft.

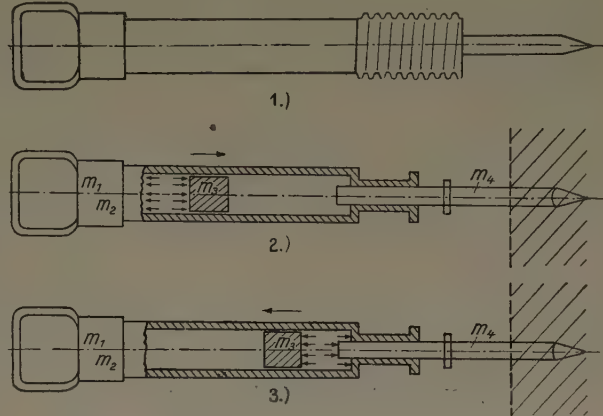


Bild 1—3. Aufbau und Wirkungsweise des Preßlufthammers

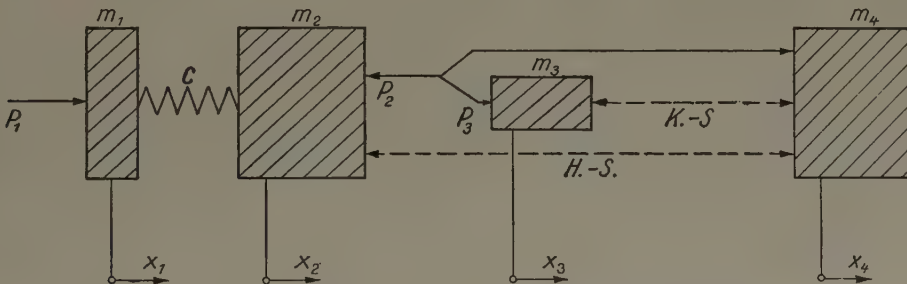


Bild 4. Dynamisches Schema für das Kräftespiel im Preßlufthammer

Das mechanische Modell des Vorganges entspricht dem in Bild 4 dargestellten Sachverhalt. Die beiden Massen  $m_1$  und  $m_2$  des Hammers sind durch eine linear-elastische Feder (Federkonstante  $c$ ) miteinander verbunden; dabei tritt u. a. die Frage auf, ob bei einer bestimmten Wahl dieser Federkonstanten eine Abminderung des Rückstoßes ohne Verminderung des Wirkungsgrades des Hammers erzielt werden kann. Die von Hand ausgeübte Kraft ist mit  $P_1$ , die vom Gasdruck auf  $m_2$  ausgeübte Kraft mit  $P_2$  gekennzeichnet. Die Kolbenmasse  $m_3$  unterliegt einer Druckkraft  $P_3$ , welche beim Hinweg des Kolbens mit  $P_2$  übereinstimmen würde, wenn die auf die andere Kolbenseite wirkende Kraft, welche mit dem Ausströmungsvorgang der dort befindlichen Luft in Zusammenhang steht, und die Wandreibung vernachlässigt werden. Im Augenblick des Aufprallens auf den Meißel kommt ferner eine momentane Stoßkraft hinzu, die in Bild 4 gestrichelt angedeutet ist. Der Bewegungsvorgang des Kolbens muß daher in zwei Abschnitten gerechnet werden, wobei für die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß der Impulssatz zur Anwendung kommt. Nimmt man nun einen bestimmten Verlauf der Kraft  $P_2$  als vorgegeben an, so ergibt sich daraus zugleich der zeitliche Ablauf der Kraft  $P_3$  und damit die Kolbenbewegung beim Kolbenhinweg. Beim Rückweg des Kolbens ist  $P_2$  dem Absolutbetrage nach schon deshalb sicher kleiner als der Absolutwert von  $P_3$ , da die Ringfläche des Zylinderverschlusses wesent-

lich kleiner ist als die Kolbenfläche. Wird noch eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung (Konstante  $\vartheta_1$ ) angenommen, so ergeben sich folgende Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{x}_1 + \vartheta_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c (x_1 - x_2) = P_1(t) \quad \dots \quad (1),$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + \vartheta_1 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c (x_2 - x_1) = -P_2(t) \quad \dots \quad (2).$$

Zur Integration muß der zeitliche Ablauf von  $P_2$  vorgegeben sein. Es ist hierbei eine Funktion zu wählen, welche die Periodizitätsbedingung des Bewegungsvorganges erfüllt. Wird die Dauer einer Schlagperiode („Schwingungsdauer“) mit  $\tau$  bezeichnet, so läßt sich die Funktion  $P_2$  durch trigonometrische Funktionen darstellen, deren Argumente ganze Vielfache von  $\varphi = \omega t$  sind. Die hierbei auftretende Kreisfrequenz  $\omega$  steht infolge der Periode  $2\pi$  der trigonometrischen Funktionen mit der Schwingungsdauer in dem bekannten Zusammenhang:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}; \quad \omega t = \varphi = 2\pi \frac{t}{\tau} \quad \dots \quad (3).$$

Der einfachste Ansatz, der der Periodizität Rechnung trägt und zugleich die Abnahme des Absolutbetrages von  $P_2$  beim Kolbenrücklauf berücksichtigt, läßt sich folgendermaßen darstellen (bei Herleitung der strengen Lösung in Abschnitt 13 wird eine allgemeinere Formulierung benutzt):

$$P_2 = D_2 + E_2 \cos \varphi + F_2 \cos (2\varphi) \quad \dots \quad (4).$$

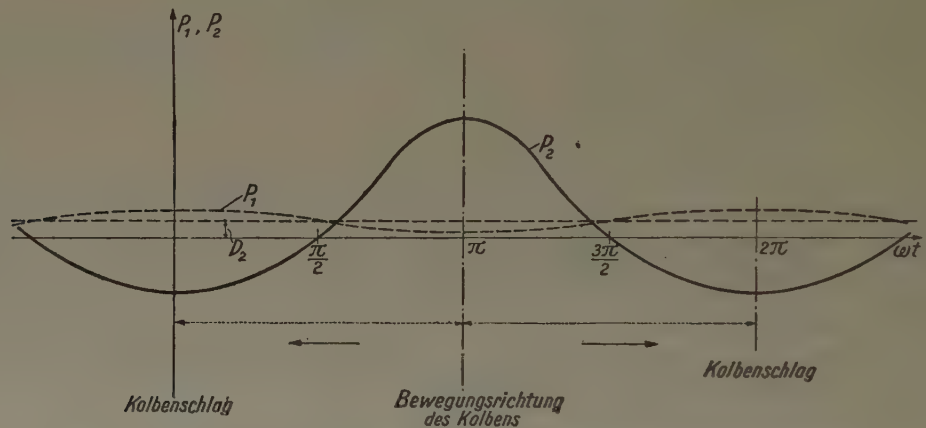


Bild 5. Kräfteverlauf für die Näherungslösung (schwimmender Hammer mit optimaler Zusatzfederung)

Bei einer entsprechenden Wahl der Konstanten  $D_2$ ,  $E_2$  und  $F_2$  ergibt sich hiermit z. B. der in Bild 5 ersichtliche Kraftverlauf. Bei anderen Werten von  $E_2$  und  $F_2$  lassen sich beliebig steile Kurvenzüge darstellen. Beim kontinuierlichen Schwingungsvorgang, auf den es für die technische Anwendung besonders ankommt, wird die Kraftfunktion  $P_1$  ebenfalls eine periodische Funktion von der Art des Ansatzes (4) darstellen, so daß gesetzt werden kann:

$$P_1 = D_1 + E_1 \cos \varphi + F_1 \cos (2\varphi) \quad \dots \quad (5).$$

Addiert man zunächst die Gl. (1) und (2), so erhält man unter Berücksichtigung der Gl. (4) und (5):

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = D_1 - D_2 + (E_1 - E_2) \cos \varphi + (F_1 - F_2) \cos (2\varphi) \quad \dots \quad (6).$$

Hieraus ergibt sich nach Integration die Beziehung:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = \frac{D_1 - D_2}{2} t^2 - \frac{E_1 - E_2}{\omega^2} \cos \varphi - \frac{F_1 - F_2}{4\omega^2} \cos (2\varphi) + Gt + H \quad \dots \quad (7).$$

Dividiert man andererseits Gl. (1) durch  $m_1$  und Gl. (2) durch  $m_2$  so ergibt sich nach Subtraktion beider Gleichungen

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)'' + \vartheta_1 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (x_2 - x_1)' + c \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (x_2 - x_1) \\ = \frac{1}{m_1 m_2} [-D_1 m_2 - D_2 m_1 - (E_1 m_2 + E_2 m_1) \cos \varphi - (F_1 m_2 + F_2 m_1) \cos (2\varphi)] \end{aligned} \quad (8).$$

Die Integration liefert bei Vernachlässigung der Dämpfung ( $\vartheta_1 = 0$ ):

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 = -\frac{D_1 m_2 + D_2 m_1}{(m_1 + m_2) c} + \frac{1}{m_1 m_2} \left[ -\frac{E_1 m_2 + E_2 m_1}{\alpha^2 - \omega^2} \cos \varphi - \frac{F_1 m_2 + F_2 m_1}{\alpha^2 - 4\omega^2} \cos (2\varphi) \right] \\ + K \sin (\alpha t - \psi) \quad \dots \quad (9). \end{aligned}$$



Hierbei ist

$$\alpha = \sqrt{c \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} \dots \dots \dots (10)$$

die Eigenfrequenz des Systems  $m_1, m_2, c$ . Die Größen  $G, H$  und  $K$ , sowie der Phasenwinkel  $\varphi$  sind vier Integrationskonstante, die sich bei der Integration des Systems der beiden gekoppelten Differentialgleichungen (1) und (2) ergeben. Die Auflösung der Gln. (7) und (9) nach  $x_1$  und  $x_2$  ergibt:

$$x_1 = A_1 + B_1 \cos \varphi + C_1 \cos (2 \varphi) + M_1 t^2 + N_1 t + Q_1 \sin (\alpha t - \varphi) \dots \dots (11),$$

$$x_2 = A_2 + B_2 \cos \varphi + C_2 \cos (2 \varphi) + M_2 t^2 + N_2 t + Q_2 \sin (\alpha t - \varphi) \dots \dots (12).$$

Die Ausrechnung liefert:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{H}{m_1 + m_2} + \frac{D_1 m_2 + D_2 m_1}{(m_1 + m_2)^2 c} m_2, \\ B_1 &= \frac{\frac{\alpha^2}{m_1 + m_2} (E_2 - E_1) + \frac{\omega^2}{m_1} E_1}{\omega^2 (\alpha^2 - \omega^2)}, \\ C_1 &= \frac{\frac{\alpha^2}{m_1 + m_2} (F_2 - F_1) + \frac{4 \omega^2}{m_1} F_1}{4 \omega^2 (\alpha^2 - 4 \omega^2)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13),$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{D_1 - D_2}{2(m_1 + m_2)}, \\ N_1 &= \frac{G}{m_1 + m_2}, \\ Q_1 &= -\frac{K m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14),$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \frac{H}{m_1 + m_2} - \frac{(D_1 m_2 + D_2 m_1) m_1}{(m_1 + m_2)^2 c}, \\ B_2 &= \frac{\frac{\alpha^2}{m_1 + m_2} (E_2 - E_1) - \frac{\omega^2}{m_2} E_2}{\omega^2 (\alpha^2 - \omega^2)}, \\ C_2 &= \frac{\frac{\alpha^2}{m_1 + m_2} (F_2 - F_1) - \frac{4 \omega^2}{m_2} F_2}{4 \omega^2 (\alpha^2 - 4 \omega^2)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15),$$

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= \frac{D_1 - D_2}{2(m_1 + m_2)}, \\ N_2 &= \frac{G}{m_1 + m_2}, \\ Q_2 &= \frac{K m_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16).$$

Für die Bewegung des Kolbens steht eine weitere Gleichgewichtsbeziehung zur Verfügung, welche außerhalb des Stoßvorgangs, also während der freien Bewegung des Kolbens im Zylinder folgende Form hat:

$$m_3 \ddot{x}_3 + \vartheta_2 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) = P_3 \dots \dots \dots (17).$$

Auch hierbei wurde geschwindigkeitsproportionale Dämpfung angenommen (Konstante  $\vartheta_2$ ). Die Kraft  $P_3$  ist, wie bereits erwähnt, beim Hinweg des Kolbens etwas kleiner als  $P_2$ , beim Rückweg dem Absolutbetrage nach größer als der Absolutwert von  $P_2$ . Da beim Rückweg der Kolben vom Meißel reflektiert wird, besteht die Notwendigkeit, eine besondere Annahme über die Art des Stoßvorganges einzuführen. Bei besonders hartem Material des Meißelkopfes einerseits und des Schlagkolbens andererseits wird sich der Stoßvorgang dem elastischen Stoß nähern. Bei längerer Benutzung des Hammers wird jedoch die Elastizität nachlassen, so daß ein mehr oder weniger großer Stoßverlust eintritt. Als Gegenmasse kommt außer der Masse des Meißels auch

noch ein gewisser Betrag des zu bearbeitenden Materials, z. B. der Kohle, in Betracht. Je nach der Härte der Kohle wird man eine größere oder kleinere Gegenmasse bei der Behandlung des Stoßvorganges einzusetzen haben. Es ergibt sich also hier in verschiedener Hinsicht die Notwendigkeit, besondere Annahmen einzuführen.

Zunächst sei eine einfache Näherungslösung angegeben, wobei vereinfachende Annahmen über den Stoßvorgang und über den Beginn der Kolbenrückluftbewegung eingeführt werden, welche weder kinematische noch dynamische Widersprüche enthalten. Beim Kolbenrücklauf würde man bei Benutzung der Funktion (4) für  $P_3$  zwar eine zu kleine Kraft einsetzen. Macht man andererseits die vereinfachende Annahme vollkommener Elastizität mit unendlich großer Gegenmasse<sup>1)</sup>, so ist damit der durch die zu klein gewählte Kraft begangene erste Fehler teilweise durch den bei der Reflektionsbewegung begangenen zweiten Fehler, welcher eine zu hohe Reflektionsgeschwindigkeit liefert, wieder kompensiert. Im Sinne der zunächst beabsichtigten Näherung sei deshalb die Funktion (4) auch für  $P_3$  benutzt und angenommen, daß der Kolben am Meißel eine Geschwindigkeitsumkehrung erfährt. Die mittlere Geschwindigkeit sämtlicher Massen während des Schwingungsvorganges (zugleich Geschwindigkeit des Gesamtschwerpunktes) sei mit  $v_0$  bezeichnet. Dann gilt entsprechend dem Stoßgesetz für unendlich große Gegenmasse  $m_4$  mit der Geschwindigkeit  $v_0$ :

$$(\dot{x}_3 - v_0)_{t=0} = -(\dot{x}_3 - v_0)_{t=\tau} \quad \dots \quad (18).$$

Mit  $P_2$  statt  $P_3$  und  $\vartheta_2 = 0$  geht Gl. (17) über in

$$m_3 \ddot{x}_3 = D_2 + E_2 \cos \varphi + F_2 \cos (2\varphi) \quad \dots \quad (19),$$

bzw. nach einmaliger Integration unter Beachtung von Gl. (18) und der Forderung, daß die mittlere Geschwindigkeit mit  $v_0$  übereinstimmen muß:

$$\dot{x}_3 - v_0 = \frac{1}{m_3} \left[ D_2 \left( t - \frac{\tau}{2} \right) + \frac{E_2}{\omega} \sin \varphi + \frac{F_2}{2\omega} \sin (2\varphi) \right] \quad \dots \quad (20).$$

Es folgt:

$$x_3 - v_0 t = \frac{1}{m_3} \left[ \frac{D_2}{2} (t^2 - \tau t) + \frac{E_2}{\omega^2} (1 - \cos \varphi) + \frac{F_2}{4\omega^2} (1 - \cos (2\varphi)) \right] \quad \dots \quad (21).$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß der Kolbenweg von der Stelle  $t = 0$  aus gerechnet wird, d. h.

$$(x_3)_{t=0} = 0 \quad \dots \quad (22).$$

Dadurch wurde über die neu hinzutretende Integrationskonstante bereits verfügt.

### 3. Lösung des Problems für den schwimmenden Hammer

Es sei zunächst die weitere Rechnung für den Sonderfall durchgeführt, daß der Schlag auf den Meißel allein vom Schlagkolben ausgeübt wird, während der Hammer selbst nicht auf den Meißelbund auftrifft, sondern unmittelbar vorher durch das Druckluftpolster abgefangen wird. In diesem Falle arbeitet der Hammer besonders weich und verursacht nur verhältnismäßig geringen Rückstoß, so daß dieser Vorgang an sich im Sinne der gestellten Aufgabe liegen würde, wenn nicht gleichzeitig durch das Fehlen des Hammerschlages auf den Meißelbund eine Verminderung der Nutzleistung des Preßlufthammers eintreten würde. Charakteristisch ist für diesen Fall der rein periodische Charakter der Funktionen  $x_1$  und  $x_2$ . Da der Hammerkörper selbst keinem Stoßvorgang unterworfen ist, entfällt bei seiner Bewegungskordinate  $x_2$  das Glied mit  $t^2$ . Mit Bezug auf Gl. (11) bis (16) gilt in diesem Falle:

$$M_2 = 0; \quad D_1 = D_2; \quad M_1 = 0; \quad Q_1 = Q_2 = K = 0 \quad \dots \quad (23).$$

Gleichzeitig erkennt man aus Gl. (14), daß der Koeffizient des entsprechenden Gliedes bei  $x_1$  ebenfalls verschwindet. Daraus folgt, daß die Bewegung der am Oberkörper des Arbeiters abgestützten Masse  $m_1$  ebenfalls rein periodischer Natur ist, so daß zwar Schwingungs-, aber keine Stoßkräfte übertragen werden.

Wird wieder die mittlere Geschwindigkeit der Massen  $m_1$  und  $m_2$  mit  $v_0$  bezeichnet, so ergibt sich aus den Gl. (11) bis (16):

$$\left. \begin{aligned} x_1 - v_0 t &= -B_1 (1 - \cos \varphi) - C_1 (1 - \cos (2\varphi)) + R, \\ R &= \frac{1}{m_1 + m_2} \left[ \frac{1}{c} (D_1 m_2 + D_2 m_1) + \frac{1}{\alpha^2 - \omega^2} (E_1 m_2 - E_2 m_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha^2 - 4\omega^2} (F_1 m_2 + F_2 m_1) \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (24),$$

$$x_2 - v_0 t = -B_2 (1 - \cos \varphi) - C_2 (1 - \cos (2\varphi)) \quad \dots \quad (25).$$

<sup>1)</sup> Bei Aufstellung der strengen Lösung in Abschnitt 13 wird die Stoßzahl der unvollkommenen Elastizität eingeführt.

Bildet man aus Gl. (21) und Gl. (25) die Koordinate  $x_3 - x_2$  der Relativbewegung zwischen Kolben und Hammer, so ergibt sich:

$$x_3 - x_2 = \frac{D_2}{2 m_3} (t^2 - \tau t) + \left( \frac{E_2}{m_3 \omega^2} + B_2 \right) (1 - \cos \varphi) + \left( \frac{F_2}{4 m_3 \omega^2} + C_2 \right) (1 - \cos (2 \varphi)) \quad (26)$$

Durch Differenzieren folgt für die Relativgeschwindigkeit zwischen Kolben und Hammer der Ausdruck:

$$(x_3 - x_2)' = \frac{D_2}{m_3} \left( t - \frac{\tau}{2} \right) + \omega \left( \frac{E_2}{m_3 \omega^2} + B_2 \right) \sin \varphi + 2 \omega \left( \frac{F_2}{4 m_3 \omega^2} + C_2 \right) \sin (2 \varphi) \quad (27).$$

Sobald der Kolben relativ zum Hammer den Hub  $s$  zurückgelegt hat, wird die Relativgeschwindigkeit gleich Null. Man erkennt aus Gl. (27), daß in diesem Falle die verstrichene Zeit  $t_1$  gleich der halben Schwingungsdauer wird:

$$t_1 = \frac{\tau}{2} \quad \dots \dots \dots (28).$$

Durch Einsetzen dieses Zeitwertes in Gl. (26) ergibt sich der Hub:

$$s = (x_2 - x_3)_{t=\tau/2} \quad \dots \dots \dots (29),$$

bzw.

$$s = \frac{D_2 \tau^2}{8 m_3} - \frac{2 E_2}{m_3 \omega^2} - 2 B_2 \quad \dots \dots \dots (30).$$

Nach Umrechnen der Schwingungsdauer in die Frequenz entsprechend der Definitionsgleichung (9) ergibt sich aus (30) eine Beziehung, welche bei gegebener Hublänge die Frequenz liefert. Es folgt:

$$s \omega^2 = \frac{1}{m_3} \left[ \frac{\pi^2}{2} D_2 - 2 E_2 \right] - 2 B_2 \omega^2 \quad \dots \dots \dots (31).$$

Die so gefundene Lösung soll an Hand von zwei Sonderfällen untersucht werden, wobei der erste sich auf die optimale Federkonstante bezieht, während der zweite eine Vergleichsrechnung für einen gleich schweren Hammer ohne Federeinbau darstellt.

#### 4. Lösung für den schwimmenden Hammer mit optimaler Zusatzfederung

Betrachtet man Gl. (24), so erkennt man, daß diejenige Ausführung des zusatzgefederten Hammers am günstigsten sein wird, bei welcher der Handgriff eine gleichmäßige Vorwärtsbewegung ausführt. Diese Bedingung ist offenbar erfüllt, wenn die Koeffizienten  $B_1$  und  $C_1$  verschwinden, bzw. wenn die Bedingungen [vgl. (13)]

$$c \left( 1 - \frac{E_2}{E_1} \right) = m_2 \omega^2, \quad c \left( 1 - \frac{F_2}{F_1} \right) = 4 m_2 \omega^2 \quad \dots \dots \dots (32)$$

erfüllt sind. Die Elimination der Federkonstanten aus beiden Gleichungen führt auf eine Beziehung für die in der Kraftfunktion  $P_1$  auftretende Koeffizienten; sie lautet:

$$3 - 4 \frac{E_2}{E_1} + \frac{F_2}{F_1} = 0 \quad \dots \dots \dots (33).$$

Da die Kraft  $P_1$  vom Arbeiter ausgeübt wird, erkennt man, daß es eine bestimmte Art der Druckausübung bei der Hammerbedienung gibt, für welche der Handgriff besonders ruhig bleibt. Es ist ersichtlich, daß diese Bedingung für sehr kleine Koeffizienten  $E_1$  und  $F_1$  erfüllbar ist. Macht man von den Bedingungen (32) und (33) bei der Frequenzgleichung (31) Gebrauch, so geht diese über in die einfache Aussage

$$s \omega^2 = \frac{1}{m_3} \left[ \frac{\pi^2}{2} D_2 - 2 E_2 \right] + \frac{2}{m_2} (E_1 - E_2) \quad \dots \dots \dots (34).$$

Ferner wird:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - v_0 t &= R = 0, \\ x_2 - v_0 t &= \frac{1}{m_2 \omega^2} \left[ (E_1 - E_2) (1 - \cos \varphi) + \frac{F_1 + F_2}{4} (1 - \cos (2 \varphi)) \right], \\ x_3 - v_0 t &= \text{wie Gl. (21)} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots (35).$$



### 5. Durchrechnung eines Zahlenbeispiels für den schwimmenden Hammer mit optimaler Zusatzfederung

Bei einem Druck von 5 atü und einem Kolbendurchmesser von 38 mm würde sich eine maximale Druckkraft von 57 kp ergeben. Mit Bezug auf Bild 5 sei angenommen, daß für das Kraftgesetz der auf den Kolben einwirkenden Luftdruckkraft die Koeffizienten  $E_2 = -5 D_2$ ,  $F_2 = D_2$  gelten. Für die maximale Kraft folgt mit Bezug auf Gl. (4), wenn vom Einfluß der durch den Steuermechanismus bedingten zusätzlichen Druckschwankungen abgesehen, bzw. angenommen wird, daß diese in Gl. (4) schon berücksichtigt sind:

$$P_{2\max} = (P_2)_{\varphi=\pi} = D_2 - E_2 + F_2 = 7 D_2 = 57 \text{ kp} \quad (36).$$

Demnach folgen:

$$D_2 = 8,1 \text{ kp}; \quad E_2 = -40,5 \text{ kp}; \quad F_2 = 8,1 \text{ kp} \quad (37).$$

Die Gesamtmasse des Hammers ohne Kolben und ohne Meißel sei:

$$m_1 + m_2 = 0,0124 \text{ kp cm}^{-1} \text{ sec}^2 \quad (38),$$

während die Kolbenmasse den Betrag

$$m_3 = 0,00104 \text{ kp cm}^{-1} \text{ sec}^2 \quad (39)$$

annimmt. Für den Fall der Abfederung des Handgriffs vom eigentlichen Hammerkörper sei die Masse der abgefederten Teile:

$$m_1 = 0,0024 \text{ kp cm}^{-1} \text{ sec}^2 \quad (40),$$

so daß die Restmasse des Hammerkörpers den Betrag

$$m_2 = 0,01 \text{ kp cm}^{-1} \text{ sec}^2 \quad (41)$$

annimmt. Wird weiterhin angenommen, daß die Federkonstante der Optimallösung entspricht und der Hammer so bedient wird, daß der Handgriff beschleunigungsfrei bleibt, so muß Gl. (34) erfüllt sein. Mit

$$E_1 = -0,1 E_2 \quad (42)$$

folgt aus Gl. (33)

$$F_1 = -\frac{F_2}{43} \quad (43).$$

Für die Federkonstante liefert Gl. (32)

$$\frac{c}{\omega^2} = \frac{m_2}{11} = 0,000909 \text{ kp cm}^{-1} \text{ sec}^2 \quad (44).$$

Bei einem Hub des Hammers vom Betrage

$$s = 20 \text{ cm} \quad (45),$$

liefert Gl. (34) für die Frequenz den Wert

$$\omega^2 = 6260 \text{ sec}^{-2}; \quad \omega = 79,1 \text{ sec}^{-1} \quad (46).$$

Damit folgen für die Schwingungsdauer und die Federkonstante

$$\tau = 0,079 \text{ sec}; \quad c = 5,7 \text{ kp/cm} \quad (47).$$

Die Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  entsprechen dann den Gleichungen

$$P_1 = 8,1 + 4,05 \cos \varphi - 0,19 \cos (2 \varphi); \quad P_2 = 8,1 - 4,05 \cos \varphi + 8,1 \cos (2 \varphi) \quad (48).$$

Der Verlauf von  $P_1$  und  $P_2$  ist in Abb. 5 eingezeichnet. Gleichzeitig wurden die Bewegungen der drei Massen genau berechnet, wobei sich ergab

$$x_1 - v_0 t = R = 0, \quad x_2 - v_0 t = 0,68 - 0,71 \cos \varphi + 0,03 \cos 2 \varphi \quad (49),$$

$$x_3 - v_0 t = 0,622 \varphi (\varphi - 2 \pi) - 5,91 + 6,22 \cos \varphi - 0,31 \cos (2 \varphi) \quad (50).$$

Die Ergebnisse der Rechnungen sind in Bild 6 zusammengestellt. Man erkennt, daß die Masse  $m_2$  nur eine schwache Pendelbewegung gegenüber der geradlinigen Bewegung der Masse  $m_1$  ausführt. Die Masse  $m_3$  (Kolben) führt dagegen eine sehr starke Rücklaufbewegung aus. Die gestrichelte eingezeichnete Linie bringt zum Ausdruck, daß der in der Rechnung vorausgesetzte Verlauf einer zu hohen Anfangsgeschwindigkeit und einer zu niedrigen Kraft bei Beginn der Bewegung entspricht, und soll eine diesbezügliche Korrektur veranschaulichen.

### 6. Lösung für den schwimmenden Hammer ohne Zusatzfederung

Das schwingende System geht bei unendlich großer Federkonstante in das System ohne Zusatzfeder über, bei welchem die Massen  $m_1$  und  $m_2$  starr miteinander verbunden sind. Die entsprechenden Beziehungen für die Integrationskonstanten gehen unmittelbar aus den Gl. (13) bis (16) hervor, wenn  $c$  und damit die Eigenfrequenz  $\alpha = \infty$  gesetzt wird. Insbesondere erhält man

$$A_1 = A_2 = \frac{H}{m_1 + m_2}, \quad B_1 = B_2 = \frac{E_2 - E_1}{\omega^2 (m_2 + m_1)}, \quad C_1 = C_2 = \frac{F_2 - F_1}{4 \omega^2 (m_1 + m_2)} \quad (51).$$

Im Falle des schwimmenden Hammers gilt wieder:

$$M_1 = M_2 = 0; \quad D_1 = D_2 \dots \dots \dots (52).$$

Für die Hammerbewegung erhält man aus Gl. (11) und (12):

$$x_1 - v_0 t = x_2 - v_0 t = \frac{1}{(m_1 + m_2) \omega^2} \left[ (E_1 - E_2) (1 - \cos \varphi) + \frac{F_1 - F_2}{4} (1 - \cos (2 \varphi)) \right] \quad (53).$$

Aus Gl. (31) ergibt sich für die Frequenz die Bedingung

$$s \omega^2 = \frac{1}{m_3} \left( \frac{\pi^2}{2} D_2 - 2 E_2 \right) + \frac{2 (E_1 - E_2)}{m_1 + m_2} \dots \dots \dots (54).$$

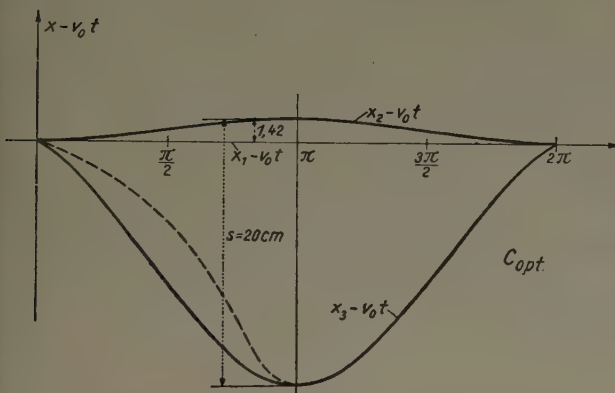


Bild 6. Bewegungskordinaten für die Näherungslösung (schwimmender Hammer mit optimaler Zusatzfederung)

Für die Kolbenbewegung gilt wieder Gl. (29). Zur Beurteilung des Bewegungsvorganges sei ein Zahlenbeispiel durchgerechnet.

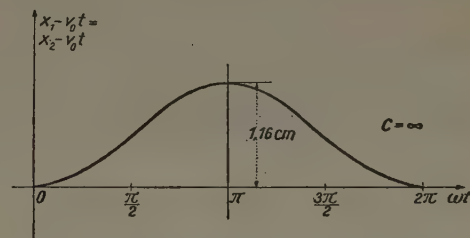


Bild 7. Bewegungsablauf für die Näherungslösung (schwimmender Hammer ohne Zusatzfederung)

### 7. Zahlenbeispiel für den schwimmenden Hammer ohne Zusatzfederung

Um eine Vergleichsgrundlage zu haben, seien für die Koeffizienten der Kraft  $P_1$  dieselben Annahmen gemacht wie beim vorigen Zahlenbeispiel, d. h. es gilt wieder:

$$E_1 = -0,1 E_2; \quad F_1 = -\frac{F_2}{43} \dots \dots \dots (55).$$

Dann liefert die Frequenzgleichung (67) für einen Hub  $s = 20 \text{ cm}$ :

$$\omega^2 = 6175 \text{ sec}^{-2}; \quad \omega = 78,6 \text{ sec}^{-1}; \quad \tau = 0,08 \text{ sec} \dots \dots \dots (56).$$

Für die Hammerbewegung erhält man schließlich:

$$x_1 - v_0 t = x_2 - v_0 t = 0,55 - 0,58 \cos \varphi + 0,03 \cos (2 \varphi) \dots \dots \dots (57),$$

während sich für die Kolbenbewegung entsprechend Gl. (29) die Beziehung

$$x_3 - v_0 t = 0,631 \varphi (\varphi - 2 \pi) - 6,00 + 6,31 \cos \varphi - 0,31 \cos (2 \varphi) \dots \dots \dots (58)$$

ergibt. Die Ergebnisse sind in Bild 7 dargestellt. Der Hammerkörper führt eine schwingende Bewegung mit einem Gesamtausschlag von  $1,16 \text{ cm}$  aus. Diese Bewegung überträgt sich mit einer Frequenz von 12 Schwingungen pro Sekunde auf den Körper des Arbeiters. Die Differenz zwischen dem maximalen Kolbenausschlag und dem maximalen Hammerausschlag stellt den Hub  $s$  dar, der sich wieder zu  $20 \text{ cm}$  ergibt, was an Hand der Gl. (57) und (58) kontrolliert werden kann.

Würde man beim Hammer ohne Zusatzfeder die Forderung zu erfüllen suchen, daß sich der Hammerkörper beschleunigungsfrei verhält, so wären die Bedingungen  $B_1 = 0$  und  $C_1 = 0$  zu erfüllen. Mit Bezug auf Gl. (51) ist dies jedoch nur möglich, wenn  $E_1 = E_2$  und  $F_1 = F_2$

wird. Nachdem schon gezeigt war, daß auch  $D_1 = D_2$  wird, so würde sich  $P_1 = P_2$  ergeben. Dies bedeutet aber, daß die Druckluftkraft in derselben Höhe wie sie auf den Kolben einwirkt, vom Arbeiter ausgeübt werden muß. Bei dem angenommenen Kraftverlauf würde sich damit die maximale vom Arbeiter ausgeübte Kraft auf 7  $D_1$  (gegenüber 1,5  $D_1$ ) erhöhen. Es könnte also nur mit sehr großer Kraftanstrengung gelingen, den Hammer ruhig zu halten.

### 8. Lösung für den Hammer mit Zusatzfeder bei Doppelschlag

In den bisherigen Rechnungen wurde der sogenannte „schwimmende Hammer“ betrachtet, bei welchem die Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$  rein periodische Funktionen darstellen. Es ergab sich, daß die zeitlichen Mittelwerte der beiden Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  miteinander übereinstimmen müssen, um diesen Bewegungszustand hervorzurufen. Übt der Arbeiter eine Kraft aus, deren zeitlicher Mittelwert  $D_1$  kleiner ist als  $D_2$ , so würde der Bewegungszustand nicht zustande kommen, d. h. es wäre überhaupt keine periodische Bewegung möglich. Im Grenzfalle  $D_1 = D_2$  stellt sich die rein periodische Bewegung des Hammers ein, die in den Abschnitten 4—8 Gegenstand der Untersuchung war.

Es sei nunmehr der Fall untersucht, daß der Arbeiter eine noch größere Kraft ausübt, d. h. eine Kraft, deren zeitlicher Mittelwert  $D_1$  größer als  $D_2$  ist. Aus Gl. (14) und (16) erkennt man, daß in diesem Falle die Konstante  $M_1 = M_2 = M$  nicht mehr gleich Null wird und in die Zeitfunktionen für  $x_1$  und  $x_2$  (Gl. (11) und (12)) das nicht-periodische Glied mit  $t^2$  hereinkommt. Es muß also in diesem Falle auf den nicht-periodischen Charakter von  $x_1$  und  $x_2$  näher eingegangen werden, wobei es erforderlich wird, auch die mit den Koeffizienten  $Q_1$  und  $Q_2$  behafteten Eigenschwingungsfunktionen mit hereinzunehmen. Diese sind zwar periodisch im Sinne der Eigenschwingung, aber nicht-periodisch im Sinne der Hammerschwingung, da die Eigenfrequenz im allgemeinen nicht mit der Frequenz der Hammerschwingung zusammenfällt. Die Bewegungsgleichungen der Massen  $m_1$  und  $m_2$  nehmen daher folgende Form an, wobei wieder die konstante Schwerpunktschwindigkeit  $v_0$  des Systems durch das Glied  $v_0 t$  berücksichtigt ist:

$$x_1 - v_0 t = B_1 \cos \varphi + C_1 \cos(2\varphi) + M t^2 + Q_1 \sin(\alpha t - \psi) + R_1 \dots (59),$$

$$x_2 - v_0 t = B_2 \cos \varphi + C_2 \cos(2\varphi) + M t^2 + Q_2 \sin(\alpha t - \psi) + R_2 \dots (60).$$

Für die zeitlichen Anfangsbedingungen übernehmen wir die bisherigen Festsetzungen, so daß für die Geschwindigkeit der Masse  $m_1$  gilt:

$$(\dot{x}_1 - v_0)_{t=0} = 0 \dots (61).$$

Hieraus folgt für den Phasenwinkel:

$$\psi = (\pm) \frac{\pi}{2} \dots (62).$$

Es läßt sich nun zeigen, daß über die Konstante  $Q_1$  so verfügt werden kann, daß sich eine stoßfreie Bewegung des Hammergriffes ergibt. Die Bewegung des Hammergriffes ist offenbar dann stoßfrei, wenn nach Ablauf der halben Schwingungsdauer seine Geschwindigkeit auf  $v_0$  absinkt und eine stetige Umkehrung seiner Bewegung eintritt. Daraus ergibt sich die Bedingung:

$$(\dot{x}_1 - v_0)_{t=\tau/2} = 0 \dots (63).$$

Mit Bezug auf Gl. (59) ergibt sich hieraus:

$$M \tau - \alpha Q_1 \sin\left(\alpha \frac{\tau}{2}\right) = 0 \dots (64).$$

Mit Rücksicht auf Gl. (14) und (16) folgt weiter:

$$Q_1 = -\frac{m_2 K}{m_1 + m_2} = \frac{M \tau}{\alpha \sin\left(\frac{\alpha}{\omega} \pi\right)} = -\frac{Q_2 m_2}{m_1} \dots (65).$$

Nach Umformung erhält man:

$$K = -\frac{(D_1 - D_2) \pi}{\alpha \omega m_2 \sin\left(\frac{\alpha}{\omega} \pi\right)} \dots (66).$$

Für den Hub ergibt sich:

$$s = (x_2 - x_3)_{t=\tau/2} = \frac{\pi^2 D_2}{2 m_3 \omega^2} - \frac{2 E_2}{m_3 \omega^2} - 2 B_2 + \frac{M \pi^2}{\omega^2} + Q_2 \cos\left(\frac{\alpha \tau}{2}\right) \dots (67),$$

bzw. nach Umformung

$$s \omega^2 = \frac{1}{m_3} \left( \frac{\pi^2}{2} D_2 - 2 E_2 \right) - 2 B_2 \omega^2 + M \pi^2 + Q_2 \omega^2 \dots (68).$$



Durch diese Formulierung konnte erreicht werden, daß die Bewegung der Masse  $m_1$  innerhalb des betrachteten Intervalles einen periodischen Verlauf annimmt. Bei der Masse  $m_2$  dagegen läßt sich nicht gleichzeitig ein stetiger Geschwindigkeitsverlauf erreichen; sie erfährt durch den Stoß des Hammers auf den Meißelbund nach Ablauf der halben Schwingungsdauer eine Geschwindigkeitsumkehrung. Werden zur Vereinfachung der Rechnung hierbei wieder dieselben Annahmen gemacht wie beim Kolbenschlag, so steht dieser Gedankengang widerspruchsfrei mit Gl. (60) im Einklang. Es ergibt sich dann folgender charakteristischer Bewegungsablauf: Nach der halben Schwingungsdauer stößt der Hammer auf den Meißel (Hammerschlag), nach der vollen Schwingungsdauer stößt der Kolben auf den Meißel (Kolbenschlag), nach der anderthalbfachen Schwingungsdauer stößt wieder der Hammer auf den Meißel, nach der zweifachen stößt wieder der Kolben auf den Meißel, und so fort. Bild 8 veranschaulicht den Bewegungsablauf. Die deutlich erkennbaren Spitzen in den Wegdiagrammen des Kolbens und des Hammers beziehen sich auf den jeweiligen Stoßvorgang. Die eingezeichneten gestrichelten Linien deuten Korrekturmöglichkeiten an, die sich bei genauer Erfassung der Stoßverluste und der Rückstoßkräfte ergeben würden. Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß bei Einbau der Feder eine stoßfreie, aber nicht schwingungsfreie Bewegung des Hammergriffes möglich ist. Eine schwingende Bewegung des Hammergriffes ist im allgemeinen unvermeidlich, da infolge des verschiedenartigen Charakters der in Gl. (59) enthaltenen Funktionen eine beschleunigungsfreie Bewegung des Hammergriffes durch keine Wahl der Konstanten  $B_1$  und  $C_1$  erzielt werden kann. Nur bei einer außerordentlich weichen Zusatzfeder läßt sich eine fast völlige Beruhigung des Hammergriffes erzielen, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird.

### 9. Lösung für den Hammer bei Doppelschlag mit optimaler Zusatzfeder

Bei einer sehr weichen Zusatzfeder ist die Federkonstante  $c$  sehr klein; damit wird auch die Eigenfrequenz des Schwingungssystems  $m_1, m_2$  sehr klein und das Argument der trigonometrischen Funktion  $\cos(\alpha t)$  genügend klein, so daß von der Reihenentwicklung  $1 - \frac{1}{2} \alpha^2 t^2 + \dots$

Gebrauch gemacht werden kann. Wird dies in den Gln. (59) und (60) (mit  $\psi = -\frac{\pi}{2}$ ) angewandt und über die Konstanten so verfügt, daß für  $t = 0$  die Bewegungskordinate  $x_2$  des Hammers ganz und jene des Handgriffes bis auf den Restbetrag  $T$  verschwinden, so erhält man:

$$x_1 - v_0 t = -B_1 (1 - \cos \varphi) - C_1 (1 - \cos (2 \varphi)) + \left(M - \frac{Q_1 \alpha^2}{2}\right) t^2 + T \dots (69),$$

$$x_2 - v_0 t = -B_2 (1 - \cos \varphi) - C_2 (1 - \cos (2 \varphi)) + \left(M - \frac{Q_2 \alpha^2}{2}\right) t^2 \dots (70).$$

Das Verschwinden des Gliedes mit  $t^2$  in Gl. (82) führt auf die Bedingung:

$$Q_1 = \frac{2}{\alpha^2} M = \frac{D_1 - D_2}{\alpha^2 (m_1 + m_2)} \dots (71).$$

Andererseits berechnet sich  $Q_2$  aus  $Q_1$  gemäß Gl. (24) und (18)

$$Q_2 = -Q_1 \frac{m_1}{m_2} \dots (72),$$

so daß nunmehr Gl. (82) und (83) folgende Form annehmen:

$$x_1 - v_0 t = -B_1 (1 - \cos \varphi) - C_1 (1 - \cos (2 \varphi)) + T \dots (73),$$

$$x_2 - v_0 t = -B_2 (1 - \cos \varphi) - C_1 (1 - \cos (2 \varphi)) + \frac{D_1 + D_2}{2 m_2} t^2 \dots (74).$$

Diese Beziehungen stellen Näherungsgleichungen dar, die nur für sehr weiche Zusatzfedern Gültigkeit haben. Um den Gültigkeitsbereich abschätzen zu können, muß auf die Differenz der Cosinusfunktion und der beim zweiten Glied abgebrochenen Reihenentwicklung Bezug genommen werden. Die Ausrechnung ergibt, daß der Fehler bis zum Argument 0,6 unter 3% bleibt. Das größte Argument der Cosinusfunktion ist aber entsprechend der halben Schwingungsdauer  $\frac{\alpha \tau}{2}$ . Demnach gilt für einen Fehler unter 3% die einschränkende Bedingung:

$$\alpha \tau \leq 1,2 \dots (75).$$

Für den Hub folgt:

$$s \omega^2 = \frac{1}{m_3} \left( \frac{\pi^2}{2} D_2 - 2 E_2 \right) - 2 B_2 \omega^2 + \frac{D_1 - D_2}{2 m_2} \pi^2 \dots (76).$$



Demnach würde der Einbau einer Zusatzfeder eine Beruhigung des Handgriffes ermöglichen, auch bei Doppelschlagbetrieb des Hammers. Dies ist aber nur möglich, wenn die Federkonstante außerordentlich klein ist. Der Vollständigkeit halber sei zum Vergleich noch die Lösung für den Hammer bei Doppelschlag ohne Zusatzfeder erörtert.

### 11. Lösung für den Hammer bei Doppelschlag ohne Zusatzfeder

Die entsprechenden Beziehungen für die Integrationskonstanten wurden bereits im Abschnitt 6 angegeben. Es ist jetzt lediglich noch zu beachten, daß das Glied mit  $t^2$  hinzukommt. Ferner kommt die Eigenschwingungsfunktion in Wegfall, d. h. es ist wieder  $Q_1 = 0$  und  $Q_2 = 0$  zu setzen. Es besteht daher in diesem Falle keine Möglichkeit, das Glied mit  $t^2$  aus der Zeitfunktion für  $x_1$  zu eliminieren, d. h. der Bewegungsablauf des Hammers einschließlich Handgriff ist ohne Zusatzfeder stets stoßartig, wobei der Stoß vom Arbeiter aufgenommen wird. Der Arbeiter stellt hierbei eine Abfederung her, die in der Rechnung nicht von vornherein exakt berücksichtigt werden kann. Diese Abfederung ist stets vorhanden, da sonst kein periodischer Gesamtablauf der Bewegung zustandekommen kann, wie das Auftreten des Gliedes mit  $t^2$  zeigt. Eine solche Ausnutzung der körperlichen Elastizität bei Bedienung eines Werkzeuges ist natürlich mit nachteiligen Einflüssen auf den Organismus verbunden.

Diese Ergebnisse wurden aufgrund einer Näherungslösung abgeleitet, welche auf den vereinfachten Annahmen beruht, daß sowohl für  $P_2$ , wie auch für  $P_3$  der Ansatz (4) gilt und daß Kolbenstoß und Hammerstoß als vollkommen-elastische Stoßvorgänge bei unendlich großer Gegenmasse aufgefaßt werden können. Die so gewonnene Näherungslösung bot den Vorteil großer Übersichtlichkeit.

Nunmehr soll im folgenden Abschnitt die strenge Lösung des Problems aufgestellt werden, welche von den erwähnten einschränkenden Annahmen frei ist. Hierbei zeigt sich, daß den mit Hilfe der Näherungslösung gewonnenen Erkenntnissen qualitativ allgemeine Gültigkeit zukommt.

### 12. Die strenge Lösung des Preßlufthammerproblems

Bei Aufstellung der strengen Lösung des Problems muß zunächst beachtet werden, daß die auf den Hammer wirkende Druckkraft eine allgemeinere periodische Funktion ist, als bei Aufstellung der Näherungslösung mit Gl. (4) vorausgesetzt wurde. Der Druckverlauf im Zylinder hängt von verschiedenen Bedingungen ab, welche teils thermodynamischer Natur sind, teils mit strömungstechnischen Gesichtspunkten in Zusammenhang stehen. Von besonderem Einfluß ist dabei vor allem die konstruktive Ausbildung und Anordnung der Steuerkanäle. Um eine Lösung aufzustellen, die für alle konstruktiven Ausführungsformen gültig ist, sei für  $P_2$  mit Hilfe einer Fourier-Reihe eine allgemeine periodische Funktion zugrunde gelegt:

$$P_2 = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(k\varphi + \beta_k) \dots \dots \dots (86).$$

Dieselben Überlegungen gelten auch für die auf den Kolben wirkende Kraft  $P_3$ . Es sei daher auch für  $P_3$  mit Hilfe einer Fourier-Entwicklung eine allgemeine periodische Funktion vorausgesetzt:

$$P_3 = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\varphi + \gamma_k) \dots \dots \dots (87).$$

Schließlich muß folgerichtig auch für die vom Arbeiter ausgeübte Kraft  $P_1$  eine allgemeine periodische Funktion angesetzt werden:

$$P_1 = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\varphi + \alpha_k) \dots \dots \dots (88).$$

Die drei Gleichgewichtsbedingungen des Problems

$$m_1 \ddot{x}_1 + c(x_1 - x_2) = P_1 \dots \dots \dots (89),$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1) = -P_2, \quad m_3 \ddot{x}_3 = P_3 \dots \dots \dots (90),$$

lassen sich nach Einsetzen der Funktionen (86), (87) und (88) in der schon erläuterten einfachen Weise integrieren; dabei treten Integrationskonstanten auf, welche den besonderen kinematischen Bedingungen des Problems anzupassen sind. Wird hierbei der Zeitpunkt des Hammerstoßes mit  $t_2$  bzw.  $t_2 + \tau$ ,  $t_2 + 2\tau$  usw., sowie der Zeitpunkt des Kolbenstoßes mit  $t_3$  bzw.  $t_3 + \tau$ ,  $t_3 + 2\tau$  usw. bezeichnet, so verlangt die Periodizität des Bewegungsvorganges

$$\left. \begin{aligned} (x_1 - v_0 t)_{t=t_2} &= (x_1 - v_0 t)_{t=t_2+\tau}, \\ (x_2 - v_0 t)_{t=t_2} &= (x_2 - v_0 t)_{t=t_2+\tau}, \\ (x_3 - v_0 t)_{t=t_3} &= (x_3 - v_0 t)_{t=t_3+\tau} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (91),$$



und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 x_1 - v_0 t - x_0 = & \frac{a_0 - b_0}{2(m_1 + m_2)} \left\{ \left( t - t_2 - \frac{\tau}{2} \right)^2 - \frac{\tau^2}{4} \right. \\
 & + \frac{\tau}{\alpha \sin\left(\frac{\alpha \tau}{2}\right)} \left[ \cos\left(\alpha \left( t - t_2 - \frac{\tau}{2} \right)\right) - \cos\left(\frac{\alpha \tau}{2}\right) \right] \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \omega^2 (\alpha^2 - k^2 \omega^2)} \left\{ \left( \frac{k^2 \omega^2}{m_1} - \frac{c}{m_1 m_2} \right) a_k [\cos(k\varphi - \alpha_k) \right. \\
 & \left. - \cos(k\varphi_2 + \alpha_k)] + \frac{c b_k}{m_1 m_2} [\cos(k\varphi + \beta_k) - \cos(k\varphi_2 + \beta_k)] \right\} \dots (92),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 - v_0 t = & \frac{a_0 - b_0}{2(m_1 + m_2)} \left\{ \left( t - t_2 - \frac{\tau}{2} \right)^2 - \frac{\tau^2}{4} \right. \\
 & - \frac{m_1 \tau}{m_2 \alpha \sin\left(\frac{\alpha \tau}{2}\right)} \left[ \cos\left(\alpha \left( t - t_2 - \frac{\tau}{2} \right)\right) - \cos\left(\frac{\alpha \tau}{2}\right) \right] \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \omega^2 (\alpha^2 - k^2 \omega^2)} \left\{ \frac{c a_k}{m_1 m_2} [\cos(k\varphi + \alpha_k) - \cos(k\varphi_2 - \alpha_k)] \right. \\
 & \left. + \left( \frac{k^2 \omega^2}{m_2} - \frac{c}{m_1 m_2} \right) b_k [\cos(k\varphi + \beta_k) - \cos(k\varphi_2 + \beta_k)] \right\} \dots (93),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_3 - v_0 t = & \frac{c_0}{2 m_3} \left[ \left( t - t_3 - \frac{\tau}{2} \right)^2 - \frac{\tau^2}{4} \right] \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k^2 \omega^2} [\cos(k\varphi_3 + \gamma_k) - \cos(k\varphi + \gamma_k)] \dots (94).
 \end{aligned}$$

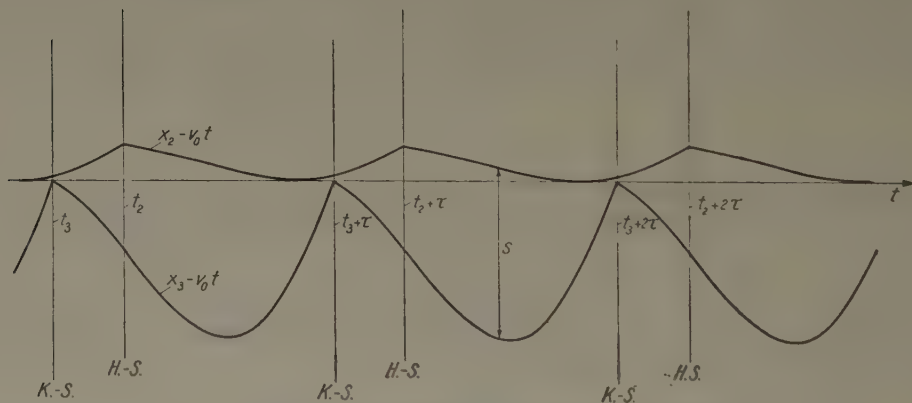


Bild 9. Beispiel für den Bewegungsablauf nach der strengen Lösung

Hierbei ist bereits eine gemeinsame mittlere Geschwindigkeit  $v_0$  der drei Massen berücksichtigt, sowie der Forderung genügt, daß die Bewegung der Masse  $m_1$  (Handgriff) stoßfrei abläuft, indem über die bei der Eigenschwingungsfunktion (Eigenfrequenz  $\alpha$ ) auftretenden Integrationskonstanten so verfügt wurde, daß die Bedingung

$$(\dot{x}_1)_{t=t_2} = (\dot{x}_1)_{t=t_2+\tau} \dots (95)$$

erfüllt ist. Durch die beiden Stoßvorgänge ist ein stückweises Aneinandersetzen der Lösungen der Differentialgleichungen (89) und (90) bedingt, wobei für Gl. (92) und (93) der Gültigkeitsbereich  $t_2 \leq t \leq t_2 + \tau$  zu beachten ist, während für Gl. (94) der Bereich  $t_3 \leq t \leq t_3 + \tau$  maßgebend ist (Bild 9).

Durch die vier Bedingungen (91) und (95) wurde über vier der auftretenden Integrationskonstanten verfügt. Die restlichen beiden Konstanten treten in verkleideter Form als die beiden Zeitwerte  $t_2$  und  $t_3$  auf, für deren Festlegung noch nähere Aussagen über den Verlauf der beiden

Stoßvorgänge zur Verfügung stehen. Bei Voraussetzung eines unvollkommen-elastischen Stoßes in beiden Fällen gelten mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} (\dot{x}_2)_{t=t_2} &= v_2^* & (\dot{x}_2)_{t=t_2+\tau} &= v_2 \\ (\dot{x}_4)_{t=t_2} &= v_{42}^* & (\dot{x}_4)_{t=t_2+\tau} &= v_{42} \\ (\dot{x}_3)_{t=t_3} &= v_3^* & (\dot{x}_3)_{t=t_3+\tau} &= v_3 \\ (\dot{x}_4)_{t=t_3} &= v_{43}^* & (\dot{x}_4)_{t=t_3+\tau} &= v_{43} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (96),$$

folgende Definitionsgleichungen:

$$v_2^* - v_{42}^* = k_2 (v_{42} - v_2) \dots \dots \dots (97),$$

$$v_3^* - v_{43}^* = k_3 (v_{43} - v_3) \dots \dots \dots (98).$$

Hierbei ist  $k_2$  die Stoßzahl des unvollkommen-elastischen Hammerstoßes und  $k_3$  jene des Kolbenstoßes. Der Impulssatz liefert:

$$m_2 v_2^* + m_4 v_{42}^* = m_2 v_2 + m_4 v_{42} \dots \dots \dots (99),$$

$$m_3 v_3^* + m_4 v_{43}^* = m_3 v_3 + m_4 v_{43} \dots \dots \dots (100).$$

Somit ergeben sich für die Geschwindigkeiten unmittelbar nach dem jeweiligen Stoß die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} v_2^* &= \frac{1}{m_2 + m_4} [(m_2 - k_2 m_4) v_2 + m_4 (1 + k_2) v_{42}], \\ v_{42}^* &= \frac{1}{m_2 + m_4} [m_2 (1 + k_2) v_2 + (m_4 - k_2 m_2) v_{42}], \\ v_3^* &= \frac{1}{m_3 + m_4} [(m_3 - k_3 m_4) v_3 + m_4 (1 + k_3) v_{43}], \\ v_{43}^* &= \frac{1}{m_3 + m_4} [m_3 (1 + k_3) v_3 + (m_4 - k_3 m_3) v_{43}] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (101).$$

Mit Rücksicht auf die weitere Rechnung ist es zweckmäßig, folgende Abkürzungen einzuführen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_2 - k_2 m_4}{m_2 + m_4} &= -k_2^*, \\ \frac{m_3 - k_3 m_4}{m_3 + m_4} &= -k_3^*, \\ \frac{m_4 (1 + k_2) (v_{42} - v_0)}{m_2 + m_4} &= w_2, \\ \frac{m_4 (1 + k_3) (v_{43} - v_0)}{m_3 + m_4} &= w_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (102).$$

Hierbei lassen sich die Größen  $k_2^*$  und  $k_3^*$  als Ersatzstoßzahlen deuten, welche dem Einfluß der endlichen Masse des gestoßenen Körpers Rechnung tragen, während die Größen  $w_2$  und  $w_3$  die jeweilige Geschwindigkeit des gestoßenen Körpers berücksichtigen. Die Gln. (101) nehmen dann die kürzere Form

$$\left. \begin{aligned} v_2^* - v_0 &= -k_2^* (v_2 - v_0) + w_2, \\ v_3^* - v_0 &= -k_3^* (v_3 - v_0) + w_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (103)$$

an. Aus Gl. (93) und (94) folgen nunmehr:

$$\left. \begin{aligned} v_2 - v_0 &= \frac{(a_0 - b_0) \tau}{2 m_2} + \psi_2, \\ v_2^* - v_0 &= -\frac{(a_0 - b_0) \tau}{2 m_2} + \psi_2, \\ v_3 - v_0 &= \frac{c_0 \tau}{2 m_3} + \psi_3, \\ v_3^* - v_0 &= -\frac{c_0 \tau}{2 m_3} + \psi_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (104).$$

Hierbei sind die Größen  $\psi_2$  und  $\psi_3$  rein periodische Geschwindigkeitsanteile, welche unmittelbar vor und nach dem Stoß den gleichen Betrag annehmen. Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in Gl. (103) folgen Beziehungen für  $\psi_2$  und  $\psi_3$ . Nach Umformung ergibt sich:

$$\psi_2 = \frac{1}{1 + k_2^*} \left[ (1 - k_2^*) (a_0 - b_0) \frac{\tau}{2 m_2} + w_2 \right] \dots \dots \dots (105)$$

Dies ist eine implizite Bestimmungsgleichung für den Zeitwert  $t_2$ . In gleicher Weise erhält man eine Beziehung für  $\psi_3$  und damit für  $t_3$ :

$$\psi_3 = \frac{1}{1 + k_3^*} \left[ (1 - k_3^*) c_0 \frac{\tau}{2 m_3} + w_3 \right] \dots \dots \dots (106)$$

Nach Einsetzen der Größen  $\psi_2$  und  $\psi_3$  in die Gln. (104) nehmen die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß folgende Werte an:

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= \frac{(a_0 - b_0) \tau}{(1 + k_2^*) m_2} + v_{42}, \\ v_2^* &= -\frac{k_2^* (a_0 - b_0) \tau}{(1 + k_2^*) m_2} + v_{42}, \\ v_3 &= \frac{c_0 \tau}{(1 + k_3^*) m_3} + v_{43}, \\ v_3^* &= -\frac{k_3^* c_0 \tau}{(1 + k_3^*) m_3} + v_{43} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (107)$$

Mit diesen Werten ergibt sich die von der Kraft  $P_1$  und den Preßluftkräften  $P_2$  und  $P_3$  geleistete Arbeit als Energieverlust der Massen  $m_2$  und  $m_3$  zu:

$$A = \frac{m_2}{2} (v_2^2 - v_2^{*2}) + \frac{m_3}{2} (v_3^2 - v_3^{*2}) \dots \dots \dots (108)$$

Die zugehörige Leistung ist daher

$$N = \frac{m_2}{2 \tau} (v_2^2 - v_2^{*2}) + \frac{m_3}{2 \tau} (v_3^2 - v_3^{*2}) = v_{42} \frac{a_0 - b_0}{1 + k_2^*} + v_{43} \frac{c_0}{1 + k_3^*} \dots \dots \dots (109)$$

Die Nutzleistung des Hammers ist:

$$N_N = \frac{m_4}{2 \tau} (v_{42}^{*2} - v_{42}^2 + v_{43}^{*2} - v_{43}^2) \dots \dots \dots (110)$$

Die mechanische Verlustleistung wird:

$$N_V = \frac{m_2}{2 \tau} (v_2^2 - v_2^{*2}) + \frac{m_3}{2 \tau} (v_3^2 - v_3^{*2}) + \frac{m_4}{2 \tau} (v_{42}^2 - v_{42}^{*2} + v_{43}^2 - v_{43}^{*2}) \dots \dots \dots (111)$$

Somit folgt für den mechanischen Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{N_N}{N} = \frac{1}{1 + \frac{N_V}{N_N}} \dots \dots \dots (112)$$

Da die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß von der Federkonstanten  $c$  unabhängig sind ist auch der mechanische Wirkungsgrad von  $c$  unabhängig; damit ist nachgewiesen, daß durch den Einbau der Federung keine Verschlechterung des mechanischen Wirkungsgrades einzutreten braucht. Die Schwingungsdauer fällt aus Gl. (112) heraus. Sie erfährt insofern mit  $c$  eine Veränderung, da sie sich, wie bei der Näherungslösung gezeigt wurde, aus dem Hub errechnet und infolgedessen auch vom Hammerausschlag abhängt, der seinerseits mit der Federkonstanten im Zusammenhang steht.

Im übrigen ist aus den Gleichungen (92), (93) und (94) leicht zu erkennen, daß der Handgriff bei schwimmendem Hammer beschleunigungsfrei und bei Doppelschlagbetrieb stoßfrei bleiben kann. Bei sehr weicher Feder verschwindet die mit dem Faktor  $(a_0 - b_0)$  behaftete Klammer bis auf einen vernachlässigbar kleinen Rest, während die unendliche Reihe bei entsprechender Handkraftfunktion  $P_1$  Null wird, so daß auch bei Doppelschlag der Handgriff beschleunigungsfrei bleiben kann, allerdings unter Bedingungen, welche sich infolge der erforderlichen sehr weichen Federung praktisch nur approximativ verwirklichen lassen.

Manuskripteingang: 14. 5. 60

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. H. NEUBER, Starnberg b. München, Max-Emanuel-Str. 10



## KLEINE MITTEILUNGEN

**Die Integralgleichungen für das Kippen quer- und längsbelasteter, gerader Träger mit doppelt-symmetrischen Querschnitten**

Bei der Untersuchung des Kippens quer- und längsbelasteter gerader Träger mit mindestens einfach-symmetrischen Querschnitten wird das Stabilitätsverhalten durch zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für die seitliche Verschiebung  $u$  und den Drillwinkel  $\vartheta$  beschrieben. Deren Kopplung ist bei einfach-symmetrischen Querschnitten so, daß man die für die numerischen Rechnungen nützlichen Integralgleichungen nur in Sonderfällen mit Hilfe bekannter Funktionen angeben kann. Diese Sonderfälle betreffen die Biegedrillknickung bei allen Querschnitten und die Kippung infolge eines linear oder quadratisch verlaufenden Biegemomentes und einer Normalkraft bei den quasi-wölbfreien Querschnitten.

Im Gegensatz dazu lassen sich Träger mit doppelt-symmetrischen Querschnitten mit Integralgleichungen vollständig behandeln. Bezüglich der Differentialgleichungen und der Bezeichnungen im allgemeinen Falle [gleichzeitige Wirkung des Biegemomentes  $M(x)$  und der Normalkraft  $N$ ] sei auf eine Arbeit von E. CHWALLA<sup>1)</sup> verwiesen. Wir führen die Abkürzungen ein:

$$r_1(s) = \frac{l^2}{B} [M_0 M(s) \vartheta(s) - Nu(s) - K_1 s - K_2]$$

und

$$r_2(s) = \lambda^2 M^2(s) \vartheta(s) - \frac{\lambda l}{\sqrt{B D}} M(s) [Nu(s) + K_1 s + K_2].$$

Dann lautet die Integralgleichung für die seitliche Verschiebung  $u$  wie folgt:

$$u(s) = \int_0^s (s-t) r_1(t) dt + \tilde{A} s + \tilde{B}.$$

Für den Drillwinkel  $\vartheta$  ergeben sich drei verschiedene Integralgleichungen:

$$\vartheta(s) = \int_0^s \left\{ \frac{1}{a} \frac{\sinh a(s-t)}{a} - (s-t) \right\} \frac{r_2(t)}{(1-\varrho)} dt + C_1 \frac{\cosh as}{\cos \tilde{a}s} + C_2 \frac{\sinh as}{\sin \tilde{a}s} + C_3 s + C_4,$$

mit

$$a = \sqrt{\frac{D l^2 (1-\varrho)}{W}}, \text{ wenn } (1-\varrho) = \left(1 - \frac{i_p^2 N}{D}\right) > 0$$

und mit

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{D l^2 (\varrho-1)}{W}}, \text{ wenn } (1-\varrho) < 0,$$

$$\vartheta(s) = \int_0^s (s-t)^3 \frac{D l^2}{6 W} \cdot r_2(t) dt + C_1 s^3 + C_2 s^2 + C_3 s + C_4,$$

wenn

$$(1-\varrho) = 0.$$

Die entkoppelten Integralgleichungen für  $M(s) = 0$  (Biege- und Drillknickung) sind uninteressant, da man die strengen Lösungen der entsprechenden Differentialgleichungen kennt. Bei Verschwinden von  $N$  erhält man Integralgleichungen, die sich nützlich für

die Berechnung der Kippzahlen von Durchlauf- und Einfeldträgern verwenden lassen<sup>2)</sup>.

Der allgemeine Fall  $N \neq 0$  und  $M(s) \neq 0$  tritt bei Rahmenkonstruktionen auf, deren vollständiges Kippverhalten in der Literatur bis heute noch nicht ganz befriedigend behandelt wurde<sup>3)</sup>. So stehen die Lösungen für die rechteckförmigen eingespannten und Zweigelenrahmen bisher aus.

Besonders interessiert das vollständige, freie Kippverhalten bei Belastung durch eine Einzelkraft in Riegelmitte und durch gegengleiche Endmomente an den Rahmenecken. Deshalb wurden für solche Rahmen die Rand- und Übergangsbedingungen formuliert und für die obigen Lastfälle die Integralgleichungen aufgestellt. Der Horizontalschub berechnet sich jeweils aus einer transzendenten Gleichung, dem Auswertungsergebnis der für Riegel und Stiel angeschriebenen Differentialgleichung  $(B_{\max})_i w_i^{IV} + N_i w'' = 0$ .

Die numerische Berechnung der Eigenwerte ist selbst auf einem Rechenautomaten nicht einfach und erfordert viel Zeit. Das angewandte Verfahren konvergiert manchmal nur mäßig, und es müssen große Matrizen aufgestellt werden.

Nach Abschluß der numerischen Rechnungen werde ich über das angegebene Problem ausführlicher berichten.

**Verfasser:** LEONARD KRAUS, Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt

<sup>1)</sup> L. KRAUS, Die Integralgleichungen der Kippung gerader Träger mit dünnwandigen, offenen und doppelt-symmetrischen Profilen. Ing. Arch. 26 (1958), S. 1–19, sowie eine in Vorbereitung befindliche Arbeit.

<sup>2)</sup> E. CHWALLA, Über das Auskippen zweistöbiger Rahmen. Stahlbau 11 (1938), S. 161–167; ferner E. CHWALLA und F. SCHÖBLIK, Theorie der Kippung rechtwinkliger Zweistabrahmen. Proc. of the 5. Int. Cong. of App. Mech. Cambridge Mass. (1938), S. 44–50; schließlich M. ESSLINGER, Kippen von Rahmenecken mit Rechteckquerschnitt. Stahlbau 23 (1954), S. 53–60.

**On the Relation between Two Theorems of Hermite and Bilharz**

1. Let

$$g(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0 \quad (1)$$

be a polynomial with complex coefficients in general. Further, let

$$g^*(s) = -i(\bar{b}_n s^n + \bar{b}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \bar{b}_1 s + \bar{b}_0),$$

where the bar denotes the conjugate complex. We then form the expression

$$\eta(g) = \frac{g(s) g^*(z) - g(z) g^*(s)}{s - z} = \sum_{\mu, \nu=1}^n h_{\mu\nu} s^{\mu-1} z^{\nu-1}.$$

Replacing  $s^{\mu-1} z^{\nu-1}$  by  $\bar{y}_{\mu-1} y_{\nu-1}$  yields the HERMITEAN form

$$h(g) = \sum_{\mu, \nu=1}^n h_{\mu\nu} \bar{y}_{\mu-1} y_{\nu-1}$$

with the real symmetric coefficient matrix

$$\S = (h_{\mu\nu}).$$

The symmetry of  $\S$  follows from  $\eta(g)$  by interchanging  $s$  and  $z$ , and the reality follows from the fact, that the  $h_{\mu\nu}$  are sums of terms of the form

$$(\alpha, \beta) = i(\bar{b}_\alpha \bar{b}_\beta - \bar{b}_\beta b_\alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq \beta - 1) \quad (2).$$

<sup>1)</sup> Beitrag zur Federhofer-Girkmannfestschrift, Wien 1950., Deutsche, S. 125–142.

$$h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu} = \sum_{\lambda=0}^{\mu-1} (\lambda, \mu + \nu - \lambda - 1) = \sum (x, \beta),$$
$$\alpha + \beta = \mu + \nu - 1.$$

which obviously can happen only for  $\mu + \nu$  odd.

2. We now consider the  $2n$ -rowed matrix

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_0 & -b_1 & b_2 & -b_3 & b_4 & -b_5 & \dots \\ -i\bar{b}_0 & i\bar{b}_1 & -i\bar{b}_2 & i\bar{b}_3 & -i\bar{b}_4 & i\bar{b}_5 & \dots \\ 0 & b_0 & -b_1 & b_2 & -b_3 & b_4 & \dots \\ 0 & -i\bar{b}_0 & i\bar{b}_1 & -i\bar{b}_2 & i\bar{b}_3 & -i\bar{b}_4 & \dots \\ 0 & 0 & b_0 & -b_1 & b_2 & -b_3 & \dots \\ 0 & 0 & -i\bar{b}_0 & i\bar{b}_1 & -i\bar{b}_2 & i\bar{b}_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

We consider the product

$$B_0 A_0 = C_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

where

$$A_0 = b_0^0 = \begin{array}{c|cccccccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & i\bar{b}_0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ \hline 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & i\bar{b}_0 & -i\bar{b}_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & -b_1 \\ \hline \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & i\bar{b}_0 & \dots & (-1)^{e-3} i\bar{b}_{e-3} & (-1)^{e-2} i\bar{b}_{e-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b_0 & \dots & (-1)^{e-3} b_{e-3} & (-1)^{e-2} b_{e-2} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & i\bar{b}_0 & -i\bar{b}_1 & \dots & (-1)^{e-2} i\bar{b}_{e-2} & (-1)^{e-1} i\bar{b}_{e-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_0 & -b_1 & \dots & (-1)^{e-2} b_{e-2} & (-1)^{e-1} b_{e-1} \end{array}$$

$$C_\varrho = \begin{vmatrix} \bar{b}_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & \bar{b}_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{\varrho 1} & c_{\varrho 2} & \dots & c_{\varrho, \varrho-1} & \bar{b}_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{\varrho+1, 1} & c_{\varrho+1, 2} & \dots & c_{\varrho+1, \varrho-1} & c_{\varrho+1, \varrho} & c_{\varrho+1, \varrho+1} & \dots & c_{\varrho+1, 2\varrho} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{2\varrho, 1} & c_{2\varrho, 2} & \dots & c_{2\varrho, \varrho-1} & c_{2\varrho, \varrho} & c_{2\varrho, \varrho+1} & \dots & c_{2\varrho, 2\varrho} \end{vmatrix}$$
$$D_q = \begin{vmatrix} c_{q+1,q+1} & \dots & c_{q+1,2q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2q,q+1} & \dots & c_{2q,2q} \end{vmatrix},$$
$$C_\rho = b_0^\rho D_\rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

We consider the element  $c_{\varrho+v, \varrho+\mu} (\mu, v = 1, 2, \dots, \varrho)$  of  $D_{\varrho}$ . The corresponding columns of  $B_{\varrho}$  and  $A_{\varrho}$  by which  $c_{\varrho+v, \varrho+\mu}$  is defined, are

$$\begin{array}{l}
 (-1)^{\nu+q-1} b_{\nu+q-1} \\
 (-1)^{\nu+q-2} i \bar{b}_{\nu+q-1} \\
 \vdots \\
 (-1)^{\nu+\mu} b_{\nu+\mu} \\
 (-1)^{\nu+\mu-1} i \bar{b}_{\nu+\mu} \\
 \vdots \\
 (-1)^{\nu+\mu-1} i \bar{b}_{\nu+\mu-1} \\
 (-1)^{\nu+\mu-2} i \bar{b}_{\nu+\mu-1} \\
 (-1)^{\nu+\mu-2} \bar{b}_{\nu+\mu-2} \\
 (-1)^{\nu+\mu-3} i \bar{b}_{\nu+\mu-2} \\
 \vdots \\
 (-1)^{\nu+1} b_{\nu+1} \\
 (-1)^{\nu} i \bar{b}_{\nu+1} \\
 (-1)^{\nu} b_{\nu} \\
 (-1)^{\nu-1} i \bar{b}_{\nu}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \\ 2(q-\mu) \text{ elements} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ 2\mu \text{ elements} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (q + \mu)\text{-th column of } A_q \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array}} \right\} 2(q - \mu) \text{ elements}$$

$(\varrho + \mu)$ -th column of  $A_\varrho$  (continued)

$$\left. \begin{array}{l} i \bar{b}_0 \\ b_0 \\ -i \bar{b}_1 \\ -b_1 \\ \vdots \\ (-1)^{\mu-2} i \bar{b}_{\mu-2} \\ (-1)^{\mu-2} b_{\mu-2} \\ (-1)^{\mu-1} i \bar{b}_{\mu-1} \\ (-1)^{\mu-1} b_{\mu-1} \end{array} \right\} 2\mu \text{ elements}$$

We, therefore, have

$$\begin{aligned} c_{\varrho+\nu, \varrho+\mu} &= (-1)^{\mu+\nu-2} i b_0 \bar{b}_{\mu+\nu-1} + (-1)^{\mu+\nu-1} i \bar{b}_0 b_{\mu+\nu-1} \\ &+ (-1)^{\mu+\nu-2} i \bar{b}_1 \bar{b}_{\mu+\nu-2} + (-1)^{\mu+\nu-1} i \bar{b}_1 b_{\mu+\nu-2} \\ &+ \dots \\ &+ (-1)^{\mu+\nu-2} i \bar{b}_{\mu-2} \bar{b}_{\nu+1} + (-1)^{\mu+\nu-1} i \bar{b}_{\mu-2} b_{\nu+1} \\ &+ (-1)^{\mu+\nu-2} i \bar{b}_{\mu-1} \bar{b}_\nu + (-1)^{\mu+\nu-1} i \bar{b}_{\mu-1} b_\nu. \end{aligned}$$

With the abbreviation (2) we obtain:

1. For  $\mu + \nu$  even:

$$\begin{aligned} c_{\varrho+\nu, \varrho+\mu} &= (0, \mu + \nu - 1) + (1, \mu + \nu - 2) + \dots \\ &+ (\mu - 2, \nu + 1) + (\mu - 1, \nu) = h_{\mu\nu}; \end{aligned}$$

2. For  $\mu + \nu$  odd:

$$\begin{aligned} c_{\varrho+\nu, \varrho+\mu} &= -[(0, \mu + \nu - 1) + (1, \mu + \nu - 2) + \dots \\ &+ (\mu - 2, \nu + 1) + (\mu - 1, \nu)] = -h_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Remembering the fact, that  $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ , we may write  $D_\varrho$  in the form

$$D_\varrho = \begin{vmatrix} h_{11} & -h_{12} & h_{13} & \dots & (-1)^{\varrho+1} h_{1\varrho} \\ -h_{12} & h_{22} & -h_{23} & \dots & \vdots \\ h_{13} & -h_{23} & h_{33} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{\varrho+1} h_{1\varrho} & \dots & \dots & \dots & h_{\varrho\varrho} \end{vmatrix}.$$

Finally, by multiplication of all even numbered rows and columns of  $D_\varrho$  by  $-1$  (which does not change the value of this determinant) we obtain

$$D_\varrho \equiv H_\varrho \quad (\varrho = 1, 2, \dots, n)$$

or, by means of (3) and (4),

$$B_\varrho \equiv H_\varrho \quad (\varrho = 1, 2, \dots, n).$$

## References

- [1] H. BILHARZ, Bemerkung zu einem Satze von Hurwitz, ZAMM 24 (1944), pp. 77-82.
- [2] CH. HERMITE, Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre deux limites données, Journ. Reine Angew. Math. 52 (1854) pp. 39-51, or Œuvres I, pp. 397-414.
- [3] W. SCHMEIDLER, Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik, Berlin 1949, Akademie-Verlag.

Verfasser: Dr. H. SIEGFRIED LEHNIGK, 1205 Dale Drive, SE, Huntsville, Alabama, USA

# BUCHBESPRECHUNGEN

**M. A. Naimark**, Normed Rings. (Translated from the first russian edition.) XVI + 560 S. Groningen 1959. P. Noordhoff N. V. Preis brosch. \$ 12.—

Durch die von LEO F. BORON durchgeführte Übersetzung der 1955 in Moskau erschienenen Originalausgabe wird das bedeutende Werk M. A. NEUMARKS über „Normierte Algebren“ einem weiteren großen Interessentenkreis erschlossen. Dabei berücksichtigt die vorliegende amerikanische Ausgabe Korrekturen und Verbesserungen, die anlässlich der Übersetzung der ersten sowjetischen Auflage ins Deutsche, Japanische und Rumänische vorgenommen wurden.

Das Buch beinhaltet eine ausführliche Darstellung und Begründung der von J. v. NEUMANN, MURRAY und vor allem von J. M. GELFAND begründeten Theorie der „normierten Algebren“: das sind Mengen, deren Elemente im üblichen Sinn eine Algebra bilden und zum anderen mit einer Norm versehen sind, die weiteren natürlichen Forderungen genügt.

Die erforderlichen Grundlagen werden in einem ersten Kapitel (Elemente der Topologie und Funktionalanalysis), das bis zur Integration in lokal-bikompakten Räumen führt, gebracht. Aus der reichen Stofffülle von acht Kapiteln mit insgesamt 41 Paragraphen können nur stichwortartig folgende Hauptgebiete genannt werden: Kommutative normierte Algebren, Darstellung symmetrischer Algebren, Gruppenalgebren, Algebren von Operatoren eines HILBERTSchen Raumes, Zerlegung einer Operatoralgebra in irreduzible Algebren. Dabei werden die Ausstrahlungen der allgemeinen Theorie auf alle möglichen Anwendungsbereiche mathematischer Spezialgebiete bis ins einzelne verfolgt; z. B. ergeben sich in eleganter einfacher Weise Resultate über trigonometrische Reihen (WIENER), die Spektralzerlegung selbstadjungierter Operatoren, Sätze über topologische Gruppen, Ergebnisse der harmonischen Analyse.

Der Stoff wird in meisterhafter Klarheit, Exaktheit und aller Ausführlichkeit dargestellt. Dadurch ist dies schöne Buch bereits für Studierende mittlerer Semester ein ausgezeichnetes Hilfsmittel für das Studium. Vor allem aber erscheint das Werk für jeden Mathematiker, der mit modernen mathematischen Betrachtungen zu tun hat, von größtem Nutzen. Schließlich findet auch der Forscher zahlreiche Ansatzpunkte, denn viele interessante Fragen dieser Theorie sind bis heute unbeantwortet geblieben.

Ein ausführliches Literaturverzeichnis (19 Seiten) bringt den Anschluß an die Originalarbeiten.

Dresden

P. H. MÜLLER

**Prof. Dr.-Ing. habil. U. Graf † und Dr. phil. H.-J. Henning**, Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. Berichtigter Neudruck. VII + 104 S. m. 9 Abb., 12 Tabellen und 12 Nomogrammen. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958. Springer-Verlag. Preis Ganzl. DM 12,60.

Die erste Ausgabe des vorliegenden Buches wurde bereits in dieser Zeitschrift (ZAMM 34 (1954), S. 198 bis 199) ausführlich besprochen und gewürdigt. Im Neudruck wurden eine Reihe kleinerer Fehler ausgemerzt und die Kurvenblätter E und F umgezeichnet sowie die Zahl der Literaturhinweise beträchtlich vergrößert. Es ist nicht verwunderlich, daß sich das Formel- und Tabellenwerk durch seine glückliche Stoffauswahl, seine klare Gliederung und seine einprägsamen Formulierungen einen großen Kreis von Anhängern geschaffen hat, so daß sich ein Nachdruck erforderlich machte. Der fleißige Benutzer wird es auch als angenehm empfinden, daß dieses kleine Nachschlagewerk jetzt im Ganzleinen-Einband vorliegt.

Dresden

G. OPITZ



**Robert L. Sutherland** (Ass. Prof., Univ. of Iowa), *Engineering Systems Analysis*. XII + 223 S. m. Abb. Reading (Mass.) 1958. Addison Wesley Publishing Comp., Inc. Preis Ganzl. \$ 7.50.

Jeder, der vor Ingenieurstudenten Vorlesungen über Höhere Mathematik hält, wird das vorliegende Buch mit Gewinn lesen, obwohl an den deutschen Hochschulen nicht die Umstände herrschen, unter denen es entstanden ist. Es ist das Ziel des Buches, dem angehenden Ingenieur zu zeigen, daß gewisse Untersuchungs- und Lösungsmethoden, die er oft für spezielle Werkzeuge seines Berufszweiges hält, tatsächlich allgemeine und mächtige Hilfsmittel sind, die sich auch dann mit Gewinn anwenden lassen, wenn es ungewöhnliche Probleme zu bewältigen gilt. Dieses Ziel wird vor allem dadurch erreicht, daß der Verfasser eine Fülle von Analogien zwischen grundlegenden Aufgaben verschiedener Gebiete herausarbeitet. Der Ingenieur lernt dabei gleichzeitig, die Probleme des Nachbargesbietes mit den Augen seines Faches anzusehen. Er gewinnt dadurch einen größeren Überblick und kann sich besser mit den Vertretern anderer Disziplinen verständigen, mit denen er zur Behandlung komplexer Aufgaben, z. B. der Steuerung oder der Automation, zusammenarbeiten muß.

Nach einem kurzen historischen Abriss (bis zu den mechanischen Modellen für die MAXWELLSche Theorie zurück) wird eine Klassifikation der Analogien erörtert, wobei die Ähnlichkeit der mathematischen Ausdrücke, welche die verschiedenen Systeme beschreiben, im Vordergrund steht. Dann werden (makro-)mechanische, elektrische und akustische Schwingungen bis zu Systemen mit zwei Freiheitsgraden getrennt studiert. Das wird jedoch in einer Form getan, die es anschließend leicht ermöglicht, Systeme der einen Art in Systeme der anderen Art qualitativ umzudeuten und die quantitativen Resultate wechselseitig zu interpretieren. Dazu wird die Verwendung dimensionsloser Größen oder eines universellen Maßsystems (GROGRI) empfohlen. Das nächste Kapitel bringt eine Einführung in die Dimensionsanalyse mit Anwendungen auf die Umrechnung der Ergebnisse von Modellversuchen. Die Prinzipien der Rückkoppelung und Steuerung werden u. a. auch an den Bauteilen von Analogrechnern erläutert. Das letzte Kapitel über Analog- und Digitalrechner soll den Ingenieur vor allem mit den Einsatzmöglichkeiten dieser wichtigen Hilfsmittel vertraut machen.

Das Buch kann von Studenten nach zweijährigem Besuch der Hochschule gelesen werden. Jedem Kapitel sind zahlreiche Aufgaben, insgesamt über 120, angefügt, die neben Überlegungen zum Stoff die numerische Durchrechnung praktischer Beispiele fordern. Literaturangaben und ein ausführliches Sachverzeichnis ergänzen das anregende Buch.

Dresden

G. OPITZ

**Dr. Ewald Burgers** (apl. Prof. a. d. Univ. Frankfurt/M.), *Einführung in die Theorie der Spiele*. 169 S. Berlin 1959. Walter de Gruyter & Co. Preis Ganzl. DM 28,—.

Die vorliegende Neuerscheinung ist als die erste deutschsprachige Darstellung der Spieltheorie sehr zu begrüßen. Der einführende Charakter des Buches, das aus Vorlesungen für Mathematiker und Arbeitsgemeinschaften für Wirtschaftswissenschaftler entstanden ist, ist durch Beschränkung im Stoffumfang und nicht durch Verzicht auf Strenge erzielt worden.

Am Schluß des einleitenden ersten Kapitels werden die Normalform eines Spieles und dessen gemischte Erweiterung definiert. Das zweite Kapitel, über die nichtkooperative Theorie allgemeiner Spiele, ist vor allem Existenz- und Eindeutigkeitsfragen der Gleichgewichtspunkte, die ein „stabiles“ Verhalten der

Spielergesamtheit beschreiben, gewidmet. Den Zweipersonen-Nullsummen-Spielen ist, im dritten Kapitel, der breitere Raum eingeräumt. Für den Hauptsatz für Matrixspiele von v. NEUMANN werden im Lauf der Darstellung drei Beweise angegeben. Die Berechnung von optimalen gemischten Strategien läßt die Verbindung der Spieltheorie zur Theorie des Linear Programming deutlich werden. Im vierten Kapitel wird die kooperative Theorie allgemeiner Spiele behandelt. Mit Hilfe der charakteristischen Funktion eines Spieles werden der v. NEUMANNsche Lösungsbegriff und der SHAPLEYSche Wert eines Spieles erörtert. Ein Anhang bringt die Beweise für einige topologische Sätze, die für einzelne kompliziertere Überlegungen benötigt werden.

Sieht man von den Ergänzungen in Kleindruck ab, kann das Buch schon von Mathematikstudenten mittlerer Semester gelesen werden; trotzdem wird durch die geschickte Stoffauswahl erreicht, daß der Leser die wesentlichen Züge der Spieltheorie kennenlernt. Wegen der der Spieltheorie eigenen Denkweise, die von der Denkweise anderer mathematischer Disziplinen in vielem abweicht, ist zur Lektüre ein gründliches Studium notwendig.

Die zur Illustration eingeflochtenen größeren Anwendungsbeispiele stammen aus Wirtschaftslehre und Soziologie. Bei Beispielen dieser Art kann es freilich leicht eintreten, daß sie den Leser — sei er nun ökonomisch vorgebildet oder nicht — eher vor neue Probleme stellen, nämlich sobald er versucht, sich den praktischen Nutzen der mit einem so großen mathematischen Apparat gewonnenen Ergebnisse klarzumachen. Dieses Bedenken soll jedoch niemanden von der Lektüre des klar geschriebenen Buches abhalten, das seiner Hauptaufgabe voll gerecht wird, in einwandfreier Weise die mathematische Seite der Spieltheorie darzustellen und eine sichere Grundlage für eine eventuelle weitere Beschäftigung mit dem Gegenstand zu schaffen. Auch soll damit kein grundsätzlicher Einwand gegen den Wert der Spieltheorie erhoben werden. Das Bestreben, die Stabilität gewisser ökonomischer Formen „mathematisch zu beweisen“, hat der Spieltheorie einen großen Aufschwung gebracht; ihre größte Bedeutung dürfte sie wohl aber auf anderen Gebieten gewinnen.

Dresden

G. OPITZ

**L. Hogben**, *Statistical Theory. The Relationship of Probability, Credibility and Error*. 510 S. London 1957. G. Allen & Unwin Ltd. Preis geb. 45 s.

Dieses Buch richtet sich eigentlich nicht an den Mathematiker. Es soll nach der Absicht des Verfassers an den Biologen, den Mediziner und den Soziologen gerichtet sein und seine Aufmerksamkeit darauf lenken, daß bei der Benutzung von Lehrsätzen aus der Statistik stets in jedem konkreten Fall zu untersuchen ist, ob die entsprechenden Annahmen erfüllt sind, unter denen ursprünglich diese Sätze abgeleitet worden sind. Es ist jedoch zu bezweifeln, ob jemand, der die Statistik in der Praxis anwenden muß, wirklich zu diesem Buch greifen wird. Dem Inhaltsverzeichnis nach verspricht das Buch einen recht interessanten historisch-philosophischen Überblick über die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, über die Fehlerrechnung und die Herausbildung der klassischen statistischen Theorien. In seinen Ausführungen ist das Buch jedoch romanhaft weitschweifig, verliert sich seitenlang in historische Einzelheiten, es bringt Zitate von erheblichen Umfang, läßt jedoch vielfach eine klare Stellungnahme des Verfassers dazu vermissen. Das vorgelegte Buch stellt „einen ausgesprochenen Luxus in bezug auf die für die Lektüre erforderliche Zeit“ dar. „Wer die Mühe nicht scheut, sich in die weitschweifigen Darlegungen des Verfassers zu vertiefen, wird gewiß manche Anregung gewinnen.“ Diese



kritischen Worte sprach M. P. GEPPERT über „Zahl und Zufall“ des gleichen Verfassers aus (Zentralblatt für Mathematik 66, S. 117). Sie treffen auf das vorliegende Buch in gleichen Maße zu. Es wäre gewiß interessant, dieses Buch vom philosophischen Standpunkt aus zu untersuchen. Diese Aufgabe hat sich der Referent jedoch nicht gestellt.

Dresden

W. RICHTER

**D. K. Cheng, Analysis of Linear Systems.** XIII + 431 S. m. 272 Abb. London 1959. Addison-Wesley Publishing Company. Preis geb. \$ 8.50 (64 s.).

Das Buch, dessen Verfasser von der elektrotechnischen Forschung herkommt, ist ein ausgesprochenes Lehrbuch, das nach den Absichten des Verfassers in erster Linie für Studierende der Elektrotechnik, aber auch für Studierende anderer technischer Disziplinen, der Physik und der Angewandten Mathematik bestimmt ist. Es bringt in didaktisch eindringlicher Form und in klarer Darstellung die analytischen Methoden zur Behandlung linearer Systeme, wie sie in elektrischen Netzwerken und analogen mechanischen Gebilden auftreten. Nach einer sich durchweg am Technischen orientierenden Einführung des Begriffs „lineares System“ werden kurz die klassischen Methoden zur Lösung gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zusammengestellt. Dabei wird bereits der Blick auf die Operatorenmethode gerichtet, die späterhin nach einer Einführung in die FOURIER- und in die LAPLACE-Transformation im Vordergrund steht. Der Ingenieurstudent wird es begrüßen, daß auf die Herleitung des zu einem Netzwerk gehörigen Systems von Differentialgleichungen und der zugehörigen Anfangsbedingungen ausführlich eingegangen wird. Für die nicht nach der Elektrotechnik hin orientierten Leser ist ein Kapitel bestimmt, das an instruktiven Beispielen zu dem einem elektrischen linearen System analogen mechanischen hinführt. Dies entspricht durchaus der zunehmenden Tendenz, sich auch in der Mechanik die in der Elektrotechnik sehr weitgehend entwickelten Methoden einschließlich der Symbolik nutzbar zu machen. Allerdings wird dieses Ziel vermutlich erst dann richtig erreicht werden können, wenn einmal von der Seite der Mechanik selbst her eine entsprechende lehrbuchmäßige Darstellung erfolgt.

In der mathematischen Begründung der Umkehrung der LAPLACE-Transformation befreit sich der Verfasser, wie aus seinem Vorwort hervorgeht, einer klugen Beschränkung. Wo es nötig ist, weist er hier und an anderen Stellen, z. B. bei der Impulsfunktion  $\delta(t)$ , auf die verborgenen mathematischen Schwierigkeiten und auf die diesbezügliche mathematische Literatur hin. In dieser Hinsicht kann das Buch als durchaus sauber bezeichnet werden.

Hervorzuheben sind noch das Kapitel über Systeme mit Rückkopplung, wo auch auf die Darstellung durch Blockdiagramme und auf die Stabilitätskriterien eingegangen wird, und das Kapitel über Systeme mit periodischer Eingabe von Impulsen (sampled-data systems), bei dem eine spezielle LAPLACE-Transformation ( $Z$ -Transformation) eingeführt und ihre Anwendung gelehrt wird. Ein letztes Kapitel beschäftigt sich mit der Anwendung der dargelegten Methoden auf spezielle lineare partielle Differentialgleichungen. Ein Anhang bringt Bemerkungen zur numerischen Lösung algebraischer Gleichungen, wobei vor allem das GRAEFFE-Verfahren behandelt wird.

Eine Fülle von durchgeführten Beispielen und von Aufgaben (mit Angabe der Lösung am Schluß des Buches) betont den Lehrbuchcharakter dieses Werkes, das sich gewiß viele Freunde erwerben wird.

Dresden

H. HEINRICH

**P. A. P. Moran, The theory of storage.** 110 S. London 1959. Methuen & Co. Ltd. Preis geb. 13 s 6 d net.

Lagerhaltungsprobleme werden etwa seit den letzten 10 Jahren intensiv studiert. Der Verf. betrachtet zwei Typen solcher Probleme: das bekannte Inventory-Problem und das sog. Damm-Problem. Das erste Problem kann etwa durch die Situation in einem Warenhaus veranschaulicht werden (Angebot, Lagerhaltung, Nachfrage). Das zweite durch die entsprechende Situation bei einem Wasserspeicher. Wenn man die beiden Probleme schematisiert, zeichnet sich das erste dadurch aus, daß der Ausstoß zufallsbedingt ist, beim zweiten gilt dasselbe für den Eingang. Es geht dem Verf. hauptsächlich darum, mit Hilfe stochastischer Prozesse mathematische Modelle für diese Probleme aufzustellen. Dabei wird stets in didaktisch ansprechender Weise von einfachen zu komplizierteren Modellen übergegangen. Doch stehen rein mathematische Aspekte nicht immer im Vordergrund. Darüber hinaus — und das ist für die Anwendung sehr wichtig und ein besonderer Vorzug dieses Werkchens — bemüht sich der Verf. auch, numerische Methoden zur Auswertung der Modelle zu behandeln. So werden z. B. für das Dammproblem Hinweise für die Anwendung der Monte-Carlo-Methode gegeben. Das letzte Kapitel ist Fragen der optimalen Steuerung der Produktion von hydroelektrischen und thermischen Kraftwerken gewidmet. Das ist ein sehr wichtiges Problem, das z. B. bei der 5. Weltkraftkonferenz in Wien 1956 viel diskutiert wurde. Das notwendige wahrscheinlichkeitstheoretische Rüstzeug ist in knapper Form im ersten Kapitel zusammengestellt. Trotzdem kann man, ohne gewisse Kenntnisse wahrscheinlichkeitstheoretischer Natur mitzubringen, kaum an die Lektüre des Buches herangehen. Vieles in diesem Buch geht auf Untersuchungen des Verf. und seiner Mitarbeiter zurück. Es versteht sich von selbst, daß das Literaturverzeichnis keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben will, doch hätte wohl die eine oder andere nicht dem englischen Sprachgebiet angehörige Arbeit erwähnt werden können. Alles in allem ist dieses kleine Buch, das ein sehr aktuelles Gebiet behandelt, eine erfreuliche Neuerscheinung.

Hamburg

L. SCHMETTERER

**Kim N. Tong, Theory of Mechanical Vibration.** XII + 348 S. m. 101 Abb. New York/London 1960. John Wiley & Sons, Inc. Preis geb. \$ 9.75.

Das höhere technische Schulwesen in den Vereinigten Staaten hat, so wie es aufgebaut ist, einen überaus starken Bedarf an Lehrbüchern für die verschiedensten technischen Fächer, auf unterschiedlichem Niveau mit unterschiedlichen Zielsetzungen und auch mit unterschiedlichen Ansprüchen an die Vorbildung der Benutzer. Um diesen gewaltigen und vielfältigen Bedarf zu decken, werben die Verlage viele Autoren an. Wo ein junger Lehrer seinen Kurs nicht ganz nach dem Vorbild eines schon vorhandenen Lehrbuchs abhält, sondern in der Lage ist, diesen Kurs etwas selbständig zu gestalten, braucht er nur bereit zu sein, die Mühe des sorgfältigen Niederschreibens auf sich zu nehmen, um seinen Kurs als Buch erscheinen zu sehen.

Auch das vorliegende Buch über Mechanische Schwingungen eines offenbar jungen und tatkräftigen Autors ist unmittelbar aus einer solchen Vortrags-Niederschrift entstanden. Es behandelt den Stoff eines typischen einführenden Kurses über Schwingungslehre in vier Kapiteln, die der Reihe nach gewidmet sind den Gebilden mit einem Freiheitsgrad, mit zwei, mehreren und unendlich vielen Freiheitsgraden.

Die Darstellung lehnt sich stark an das in vielen Büchern dieser Art Übliche an. In der Methode und in den Beispielen geht das Buch an manchen Stellen



allerdings über die konventionellen Grenzen hinaus. So bemüht sich der Verfasser z. B., Matrizen nicht nur als Stenographie zu verwenden, sondern mit einem Matrizenkalkül tatsächlich zu arbeiten. Da der Verfasser von der Mathematik herkommt, wird im ganzen Buch die mathematische Seite der Probleme in tieferen Einzelheiten verfolgt, während die Behandlung der physikalischen erheblich primitiver bleibt.

Die Ausdrucksweise ist an vielen Stellen anfechtbar. Wenn aber der Autor seinen Kurs noch mehrfach vorgetragen haben wird, werden in einer späteren Auflage diese Ungleichmäßigkeiten vermutlich geglättet sein. Kurz, ein versprechender Auftakt zu einem wahrscheinlich einmal guten Buch.

Darmstadt

K. KLOTTER

**W. Meyer-Eppler, Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie.** (Kommunikation und Kybernetik in Einzeldarstellungen, Band I.) XVIII + 446 S. m. 178 Abb. u. 1 Tafel. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. DM 98,—.

Das vorliegende Werk enthält in etwa handbuchartiger Form einen Überblick über viele Teile der gesamten Informations- oder Kommunikationstheorie, wobei die physiologisch-psychologischen Aspekte, vor allem die Rolle des Menschen als Informationsempfänger, überwiegen. Kaum eine Seite, auf der nicht mehrere neue Begriffe eingeführt werden; Definitionen dominieren gegenüber Resultaten. Das Inhaltsverzeichnis füllt 6, das Namensverzeichnis 5 und das Sachverzeichnis 36 Seiten, und so kann der Inhalt des Buches im folgenden nur kurz angedeutet werden.

An eine kurze Beschreibung der „Kommunikationskette“ im allgemeinen, in der der Perzipient stets ein menschliches Wesen ist, schließt sich ein Kapitel über „Strukturtheorie der Signale“, das sich auf die Spektralanalyse stützt. Hier werden zunächst die von einer gegebenen Fehlerschranke abhängenden Begriffe der effektiven Zeitdauer und Bandbreite und des Strukturgehaltes eines Signals erklärt. Angelpunkt der Untersuchungen sind jedoch die Reduktion von Signalen beschränkter Bandbreite auf diskrete Signale und damit zusammenhängende Begriffe wie Nyquist-Intervall, metrische Information, Informationsvolumen, Binärokodierung usw. Auch später treten praktisch immer nur diskrete Signale auf. In einem Kapitel über „Eigenschaften linearer Übertragungssysteme“, die Signale durch ein Faltungintegral mit stationärem Kern transformieren, wird vor allem die Volumkapazität des Systems definiert als das Maximum des ausgesandten Informationsvolumens, das mit einer gegebenen maximal zulässigen Verkleinerung des Informationsvolumens verträglich ist.

In den drei folgenden Kapiteln „Symbolstatistik“, „Gestörte Systeme“ und „Sicherung gegen Übertragungsfehler“ stellt der Verfasser einige Gedanken der neueren Wahrscheinlichkeitstheoretischen Informationstheorie dar. Hier erscheinen also Begriffe wie Entropie, Redundanz und andere statistische Charakteristiken eines Kollektivs, sodann, eng an die klassische SHANNONSche Arbeit anschließend, aus Symbolaggregaten bestehende Kollektive und ihre Beschreibung durch MARKOFFsche Prozesse sowie Kodierungsfragen. Die Wahrscheinlichkeiten von Symbolen werden dabei als ihren Häufigkeiten innerhalb eines gegebenen endlichen Kollektivs proportional angesehen, doch ist der Begriff des Kollektivs und des stochastischen Prozesses äußerst vage gefaßt, zumal im ersten Absatz des Abschnitts über Symbolaggregate (S. 70) Kollektive von Symbolen und von Symbolaggregaten durcheinander kommen. Weiterhin werden die Transinformation (richtig übertragene Information, rate of transmission) eines diskreten Übertragungssystems und deren Maximum über alle möglichen Quellenverteilungen, die Symbolkapazität, de-

finiert und einige spezielle Codes beschrieben, die allgemeine Theorie der Kodierung jedoch so gut wie gar nicht berührt, ja nicht einmal definiert, was der Begriff eines Codes im letztgenannten Kapitel eigentlich bedeuten soll.

Der zweite Teil des Buches, wohl der interessantere, befaßt sich im wesentlichen mit der Perzeption von Signalen durch den Menschen. Dabei spielen allerdings mathematische Methoden nur eine ganz geringe Rolle, so daß in diesem für eine mathematische Zeitschrift bestimmten Referat kaum mehr als die Kapitelüberschriften angegeben werden soll: „Die Sinnesorgane als Informationsempfänger“, „Signale und Zeichen“ (mit der allgemeinen Definition von Taxen und Taxemen), sodann, speziell, „Akustische und optische Valenzklassen als Zeichenträger“, „Formstrukturen und Konstruktionen“ (Struktur der Sprachen) und schließlich „Die gestörte sprachliche Kommunikation“.

Das Buch wird wegen seines umfassenden Charakters und der vielen Literaturhinweise von allen gern benutzt werden, die sich, von der Mathematik oder anderen Gebieten herkommend, für seinen Gegenstand interessieren. Als Lehrbuch allerdings wird es dem „arglosen Leser“ (S. 62), dem das Feld fremd ist, nicht leicht fallen, und diesem Leser, sei er Mathematiker oder nicht, wäre z. B. die vorbereitende Lektüre des schönen Büchleins der Brüder JAGLOM zu empfehlen. In der Tat wird im vorliegenden Werk die Fülle des Stoffes meist ohne Akzentuierung oder Bewertung und oft ohne Unterscheidung von Wesentlichem oder Unwesentlichem dargeboten. Dies zeigt sich z. B. beim Übergang vom 2. Kapitel (Struktur der Signale) zum 4. (Symbolstatistik). Daß es sich um eine grundlegende Änderung der Betrachtungsweise handelt, eben den Übergang zur Wahrscheinlichkeitstheoretischen, erfährt man nirgends explizit und kann es nur schwer erkennen. Statt dessen wird die Einführung der Entropie mit manchen unwesentlichen Einzelheiten beladen wie Bandbreite und Amplitude eines Signals (obwohl ausschließlich diskrete Signale eine Rolle spielen), Binärokodierung und Kodierungsverlust u. a. Hand in Hand mit dieser Darstellungsart geht häufig eine gewisse Unbestimmtheit in der Beschreibung des Rahmens, in dem sich die jeweilige Untersuchung abspielt, und der zugrunde gelegten Voraussetzungen, und überhaupt eine gelegentliche Ungenauigkeit der Formulierungen. Beispiele hierfür wurden schon genannt; weitere wären: Die Definition der metrischen Information, die der Linearität (Fußnote auf S. 40), die dritte Grenzwertgleichung auf S. 55, der Begriff des effektiven Symbolvorrats eines „offenen“ Symbolinventars, die Argumentation über Wägebexperimente (S. 67, Z. 25–27), der Grenzübergang auf S. 127, die Einteilung des sensorischen Wahrnehmungsraums in Zellen auf S. 208 nebst Definition der maximalen  $k$ -parametrischen Valenzkapazität und das auf S. 246 beschriebene Verfahren des differentiellen Anschlusses, die beide der vorher betonten Nichttransitivität der sensorischen Äquivalenzrelation widersprechen. Auch die Erklärung des zentralen Begriffs „Zeichen“ und damit des Begriffs „Taxem“ erscheint dem Ref. recht unklar; sie geschieht durch eine Art impliziter, aber sehr unvollständiger Definition. Schwächen dieser Art, die bei der notwendigerweise gedrängten Darstellung wohl kaum zu vermeiden sind, werden die Nützlichkeit des Buches sicher nicht verringern.

Heidelberg

K. KRICKEBERG

**W. L. Wilkinson, Non-Newtonian Fluids. Fluid Mechanics, Mixing and Heat Transfer.** XIV + 138 S. m. 70 Abb. London 1960. Pergamon Press. Preis geb. 37 s. 6 d.

Das Buch ist in einer Reihe von Monographien „Chemical Engineering“ erschienen. Im Vorwort



grenzt der Verfasser seine Zielsetzung deutlich genug gegenüber der des physikalischen Chemikers oder des theoretischen Rheologen ab: "The present work is concerned with what might be termed the *engineering approach*, that is to say, the development of quantitative design procedures based on the measured properties of real fluids." Der so begrenzten Zielsetzung wird das Buch in einer klar und leicht lesbaren Darstellung gerecht. Vom Titel des Werkes her gesehen hätte man freilich ein wenig von der eigentlichen Theorie der hier behandelten Medien erwartet und ist dann enttäuscht. Die Stärke des Buchs liegt in der oft geradezu erschöpfenden Detaildarstellung experimenteller Methoden, Apparaturen und Meßergebnisse, in denen sich etwa ein lernbegieriger Fachmann des Gebiets der „normalen“ (NEWTONschen) Flüssigkeiten nach einem guten einführenden Kapitel über Definition und Klassifikation der nicht-NEWTONschen Flüssigkeiten bald verloren sieht. Die Kapitel über Mischungsvorgänge und über Wärmeübergang fallen gegenüber den übrigen ab. Der theoretische Rheologe mag in dem Buch eine heilsame Konfrontierung mit den harten Realitäten auf der experimentellen Seite seines Wissensgebietes finden. Einen wirklichen Nutzen bietet das Buch aber nur dem Ingenieur in der Praxis, der mit den hier behandelten Medien umgehen und sinnvoll operieren muß, und der daher in erster Linie wissen will, wie man messend zu verwendbaren Daten und brauchbaren Verfahrensweisen kommt. Hierzu findet er in dem Buche wohl alles, was man auf diesem verwinkelten Gebiet machen kann.

Freiburg i. Br. W. O. CRIMINALE u. H. GÖRTLER

**J. E. Ruzicka**, *Structural Damping*. IV + 165 S. m. 75 Abb. Oxford 1960. Pergamon Press Ltd. Preis brosch. 30 s net.

Das Buch enthält sieben voneinander unabhängige Abschnitte, in denen von verschiedenen Autoren Probleme der Strukturdämpfung behandelt werden. Dabei versteht man unter Strukturdämpfung die Dämpfung zusammengesetzter Bauelemente (z. B. Sandwichplatten).

Im ersten Abschnitt wird die Bedeutung der Strukturdämpfung im Maschinenbau behandelt und die Benennungen und Einheiten zur Beschreibung der Dämpfung festgelegt. Der zweite Abschnitt behandelt die Gleiterscheinungen an den Kontaktflächen der Strukturen und an Maschinenverbindungen. In Abschnitt drei werden Plattenschwingungen bei Verwendung von Dämpfungsauflagen und bei Sandwichplatten besprochen. Abschnitt vier betrachtet die Dämpfungskräfte bei verschiedenen Auflagerverbindungen. Im fünften Abschnitt wird über Meßmethoden zur Ermittlung der Dämpfung gesprochen. Der sechste Abschnitt bringt Hinweise für eine geeignete Auswahl des Strukturmaterials. Im siebenten Abschnitt findet man eine Literaturzusammenstellung mit hundert Titeln über das Gebiet der Strukturdämpfung.

Dresden

F. HOLZWEISZIG

**H. Wolf**, *Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*. Lieferung 1, 48 S. m. 31 Abb. Hamburg 1960. Hanseatische Verlagsanstalt. Preis brosch. DM 6,80.

Von obigem Titel liegt nunmehr die erste der vorgesehenen zehn Teillieferungen vor. Es handelt sich hier um ein Werk, das vorzugsweise für die Studierenden und Fachleute des Vermessungswesens gedacht ist. Mit seinen geplanten 480 Seiten wird es etwa den doppelten Umfang des zur Zeit beliebtesten deutschsprachigen Buches über Ausgleichsrechnung von GROSSMANN haben. Es soll gemäß den auf der

Umschlagseite gemachten Angaben bei Beibehaltung der klassischen Schreibweise und Einteilung über GROSSMANN hinausgehend auch u. a. einiges von den Themen Matrizenrechnung und Ausgleichung trigonometrischer Netze beinhalten und wird vor allem eine größere Anzahl von Beispielen und Übungsaufgaben bringen.

Die erste Lieferung enthält im wesentlichen das Kapitel Fehlerlehre. Zahlreiche, geschickt aus den verschiedensten Gebieten des Vermessungswesens ausgewählte Beispiele und Übungsaufgaben machen dem sich in die Materie Einarbeitenden das Verständnis des Stoffes leicht. Im selben Sinne wirken auch die oft vernachlässigten, hier aber vorgeführten graphischen Lösungen der Fehlerübertragung. Besonders zu beachten sind die den meisten Abschnitten angehängten „Bemerkungen“, die zahlreiche kleine Hinweise auf oft vorkommende Fehler, kleine Rechenkniffe usw. enthalten. Hier zeigt sich, daß der Autor nicht nur Wissenschaftler, sondern ein ebenso erfahrener Praktiker der Ausgleichsrechnung ist.

Man darf auf die weiteren Lieferungen gespannt sein und wohl erwarten, daß der „Wolf“ eine bemerkenswerte Bereicherung der Literatur zum Gebiet der Ausgleichsrechnung und eine wertvolle Ergänzung zum Hochschulunterricht für Geodäten werden wird.

Dresden

G. REISSMANN

**M. A. Neumark**, *Lineare Differentialoperatoren*. XII + 394 S. Berlin 1960. Akademie-Verlag. Preis geb. DM 44,—.

Differentialoperatoren (im folgenden mit DO bezeichnet) spielen in der Mathematik und mathematischen Physik eine große Rolle, z. B. bei Anfangs- und Randwertproblemen gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen oder in der Quantenmechanik, für die die Spektraltheorie der DO der geeignete mathematische Zugang ist. Die Verarbeitung der wichtigsten Ergebnisse diesbezüglicher Originalarbeiten zu einer modernen geschlossenen Darstellung war für lange Zeit ein großes Desideratum. Daher ist es zu begrüßen, wenn das von dem namhaften Forscher M. A. NEUMARK in Moskau 1952 herausgegebene Werk nunmehr auch in einer deutschen Ausgabe vorliegt. Es ist eine Darstellung, die einmal für Studierende (mittlerer Semester, vertraut u. a. mit den grundlegenden Tatsachen über das LEBESGUESche Integral) ein wertvolles und pädagogisch ganz vorzügliches Lehrbuch bedeutet, darüber hinaus aber vor allem für den wissenschaftlich Arbeitenden eine zuverlässige Quelle ist. Auf verschiedene noch ungelöste Fragestellungen wird hingewiesen. Zur Erleichterung für den Leser werden alle erforderlichen Tatsachen — im besonderen aus der Funktionalanalysis — im Buche selbst entwickelt. So findet man nach einer Einführung in den HILBERTschen Raum eine in der Stofffülle ausführliche und fast vollständig bewiesene Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren sowie eine komplette Erweiterungstheorie symmetrischer Operatoren. Das Hauptthema, die Theorie linearer DO, wird in zwei Teilen behandelt. Der erste bringt grundlegende Tatsachen im wesentlichen unter Beschränkung auf klassische Methoden (GREENsche Funktion eines linearen DO, asymptotisches Verhalten der Eigenwerte und Eigenfunktionen, Entwicklung nach Eigenfunktionen). Bemerkenswert hierin ist die Erweiterung der Betrachtungen auf DO von Vektorfunktionen. Der zweite Teil ermöglicht mit Hilfe der bereitgestellten modernen Verfahren eine elegante und gründliche Darstellung im besonderen symmetrischer DO und ihrer Spektraltheorie, einschließlich Störungsuntersuchungen. In einem gesonderten Paragraphen werden die Beziehungen zur Quantenmechanik durch Beispiele erläutert. Das abschließende Kapitel ist der Umkehrung der STURM-LIOUVILLESchen

Aufgaben gewidmet: Aus der Verteilungsfunktion eines DO zweiter Ordnung ist dieser Operator selbst zu ermitteln.

Durch Angabe der in der Zeit von 1952 bis 1958 erschienenen hierfür bedeutsamen Veröffentlichungen ergänzt der Verfasser das ausführliche Literaturverzeichnis der Originalausgabe (12 Seiten).

Die Hervorhebung der wichtigsten Sätze und Begriffe im Druck erleichtert die Benutzung des Buches als Nachschlagewerk und trägt zu der übersichtlichen und vorzüglichen Ausgestaltung des Werkes bei.

Einige Druckfehler wird der aufmerksame Leser selbst erkennen.

Dresden

P. H. MÜLLER

**Prof. Dr.-Ing. habil. U. Graf † und Dr. phil. H.-J. Henning**, Statistische Methoden bei textilen Untersuchungen. 3. berichtigter Neudruck. XI + 291 S. m. 71 Abb., 10 Tabellen u. 10 Kurvenblättern. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 37,50.

Die Änderungen gegenüber den beiden ersten Auflagen (vgl. ZAMM 34 (1954), S. 240) bestehen in kleineren Richtigstellungen und der einheitlichen Handhabung des Prozentzeichens entsprechend der Relation  $1 = 100\%$ . Außerdem wurde eine terminologische Bereinigung im Zusammenhang mit dem Begriff des Vertrauensbereiches durchgeführt und deutlicher klarzustellen versucht, daß Vertrauensbereich und Vertrauensgrenze nur für die Kennzahl (= den Parameter) der Grundgesamtheit gelten. Das Literaturverzeichnis wurde weitgehend ergänzt.

Die Bestrebungen, die theoretische Grundlegung durch die Änderung weniger Floskeln sauberer zu gestalten, muß man leider als mißglückt ansehen. Nach wie vor wird versucht, den Begriff der statistischen Sicherheit (Abschnitt D) am ungeeigneten Objekt, nämlich dem Vertrauensintervall zu erläutern. Das dazu angegebene Beispiel hat wiederum nichts mit dem Vertrauensintervall und im Grunde auch nichts mit statistischer Sicherheit zu tun. Der Begriff des statistischen Tests dagegen wird ängstlich vermieden, und so kommt es zu keiner klaren Trennung der beiden Komplexe: Tests — Vertrauensintervalle. Wie wenig eine wirkliche Klärung der Zusammenhänge erreicht wurde, sei noch an zwei zufällig herausgegriffenen Beispielen demonstriert. Am Anfang von E. 1. (unmittelbar unter Abschnitt D!) liest man: „Die wichtigste Frage bei textilen Untersuchungen betrifft den Mittelwert aus einer Stichprobe und seinen Vertrauensbereich“. Und auf S. 97 (Beispiel 43) wird aus einer Stichprobe der Schluß gezogen: „Mit 95%iger einseitiger statistischer Sicherheit ist als obere Vertrauensgrenze der m. qu. Abw.  $s_0 = 35,6\text{ g}$  zu erwarten, ...“.

Referent hält diese Feststellungen für nötig, obwohl er den Gebrauchswert des Buches hoch einschätzt (vgl. die oben zitierte Besprechung) und sich bewußt ist, daß viele Praktiker der Textiltechnik (noch?) nichts von derartigen „Spitzfindigkeiten“ wissen wollen und auf „ihren“ GRAF-HENNING schwören. Auch diese Einstellung hat ihre Berechtigung; ist es doch eine große Leistung der beiden Verfasser, dieses Buch herausgegeben zu haben, das sich in wohlthuender Weise von vielen anderen populärstatistischen Veröffentlichungen unterscheidet und bei welchem kaum die Gefahr besteht, daß die Statistik durch unsachgemäße Anwendung und die daraus resultierenden Enttäuschungen diskriminiert wird. Doch im gleichen Maße, wie der Praktiker im Zuge der Entwicklung in die neue Disziplin immer tiefer eindringt, wächst die Notwendigkeit, begriffliche Klarheit anzustreben, und was 1952 eine Pioniertat war, kann ein knappes Jahrzehnt später schon mit anderen Augen angesehen werden.

Dresden

G. OPITZ

**M. Z. v. Krzywoblocki**, Bergman's Linear Integral Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow. X + 188 S. m. 3 Abb. Wien 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 52,—.

Die BERGMANSche Methode basiert auf Integraloperatoren, die komplex-analytische Funktionen in Lösungen gegebener partieller Differentialgleichungen transformieren. Die Methode beansprucht theoretisches und praktisches Interesse, letzteres vor allem im Zusammenhang mit kompressiblen Strömungen. Das vorliegende Buch ist eine Einführung in die Anwendungen der BERGMANNschen Methode für den Praktiker, d. h. für den Hydro- und Aerodynamiker mit entsprechender theoretischer Vorbildung. Die Darstellung konzentriert sich deshalb auf praktisch wichtige Ergebnisse, unter Fortlassung vieler Beweise, für die dann jeweils auf die entsprechende Originalliteratur verwiesen wird. Eine derartige zusammenfassende Darstellung ist begrüßenswert, da die Originalarbeiten zahlreich und weitverstreut sind.

Der Inhalt des Buches ist reichhaltig: Abschn. I, II Unterschallströmungen (CHAPLYGIN-Gleichung, Übergang zur „pseudologarithmischen“ Ebene, Dualität kompressibler und inkompressibler Strömungen, Konvergenzuntersuchungen der BERGMAN-Reihen für die Lösungen der transformierten CHAPLYGIN-Gleichung, Näherungslösungen bei vereinfachten Druck-Dichte-Beziehungen). Abschn. III Stoßwellenfreie Überschallströmungen (BERGMAN-Operatoren, die Lösungen von  $u_{xx} - u_{yy} = 0$  in Stromfunktionen der genannten Strömungen transformieren). Abschn. IV Schalldurchgangsströmungen (BERGMAN-Operatoren 2. Art, deren Anwendung im Fall der TRICOMI-Gleichung und der exakten Kompressibilitätsgleichung). Abschn. V Rotationssymmetrische Strömungen (Näherungen durch Iteration). Abschn. VI Singularitäten. Abschn. VII Andere Verfahren zur Behandlung kompressibler Strömungen. Der restliche Teil des Buches enthält Formelzusammenstellungen, Funktionentafeln, Beispiele und einige von DAVIS und RABINOWITZ auf dem SEAC durchgeführte Berechnungen von Unterschallströmungen.

Das vorliegende Buch, dessen Grundlagen frühere Veröffentlichungen des Verfassers im Österr. Ing. Arch. (1952–56) bilden, dürfte dem Hydro- und Aerodynamiker, der die BERGMAN-Operatoren bei der Lösung praktischer Probleme verwenden will, eine nützliche Hilfe sein.

Graz

E. KREYSZIG

**G. Hoheisel**, Gewöhnliche Differentialgleichungen. (Sammlung Götschen, Band 920). 6. Aufl. 128 S. Berlin 1960. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. DM 3,60.

Das bekannte Götschenbändchen über „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ hat in seiner 6. Auflage eine Neubearbeitung erfahren. Gegenüber der 5. Auflage sind die Existenz- und Eindeigkeitssätze an den Anfang des Kapitels über Differentialgleichungen 1. Ordnung gesetzt worden. Selbständige Abschnitte über „Sätze im Großen“ und über die „Abhängigkeit der Integrale von Anfangswerten und Parametern“ erweitern die Theorie dieses Kapitels, das mit den Differentialgleichungen  $m$ -ter Ordnung abschließt, wesentlich. Im 2. Kapitel werden die linearen Differentialgleichungen und ihre Integration mittels der GREENSchen Funktion behandelt. Das 4. Kapitel über Randwertaufgaben und die damit im Zusammenhang stehenden Eigenwertprobleme hat gegenüber dem der 5. Auflage keine grundsätzliche Änderung erfahren. Der STURMSche Nullstellensatz, die Sätze über Nullstellenverteilung und die Oszillationskriterien für die Differentialgleichung  $y'' + Q(x)y = 0$  sind in einem abschließenden Kapitel dargestellt.



Der theoretische Inhalt dieses Göschensbandes hat durch die Neubearbeitung an Allgemeinheit und Systematik beträchtlich gewonnen.

Freiberg/Sa.

A. KNESCHKE

**G. Hoheisel**, Partielle Differentialgleichungen. (Sammlung Göschens, Band 1003.) 4. Aufl. 130 S. Berlin 1960. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. DM 3,60.

Gegenüber der 3. Auflage von 1953 weist die nunmehr vorliegende 4. Auflage keine Änderungen auf. Ich kann mich daher darauf beschränken, die Kapitelinhalte anzugeben. In der dem Verfasser eigenen knappen, aber klaren und eindringlichen Darstellungsweise werden die Differentialgleichungen 1. Ordnung mit zwei und allgemein mit  $n$  Veränderlichen, die Systeme mit einer und mehreren unbekannten Funktionen und die Differentialgleichungen 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen behandelt.

Das Bändchen gibt einen umfassenden Einblick in die klassischen Integrationsmethoden der partiellen Gleichungen und kann als bewährter Führer in dieses Gebiet der Analysis sehr empfohlen werden.

Freiberg/Sa.

A. KNESCHKE

**Advances in Computers**, Vol. 1. X + 316 S. New York/London 1960. Academic Press. Preis geb. \$ 10,00.

Will man sich über ein Wissensgebiet, das in einer besonders raschen Entwicklung begriffen ist, einigermaßen vollständig orientieren, so ist man fast ausschließlich auf das Studium der Originalarbeiten in den verschiedenen Fachzeitschriften angewiesen, da Handbücher zu ihrer Herstellung eine so lange Zeit erfordern, daß bis zu ihrem Erscheinen die Entwicklung weit vorangeschritten sein kann.

Hier soll mit dem vorliegenden Werk auf dem Gebiet der modernen Rechentechnik eine Lücke geschlossen werden. Der 1. Band dieser neuen Serie enthält eine Reihe verschiedener zusammenfassender Artikel über besonders aktuelle Teilgebiete der modernen Rechentechnik. Folgende Autoren haben zum Gelingen dieses Vorhabens beigetragen:

- |                        |   |
|------------------------|---|
| CALVIN C. GOTTLIEB:    | General-Purpose Programming for Business Applications,    |
| NORMAN A. PHILLIPS:    | Numerical Weather Prediction,                             |
| YEHOSHUA BAR-HILLEL:   | The Present Status of Automatic Translation of Languages, |
| ARTHUR L. SAMUEL:      | Programming Computers to Play Games,                      |
| RICHARD FATEHCHAND:    | Machine Recognition of Spoken Word,                       |
| GEORGE W. REITWIESNER: | Binary Arithmetic.  |

Jeder Beitrag gestattet eine schnelle und relativ vollständige Orientierung über das jeweilige Spezialgebiet. Umfangreiche Literaturverzeichnisse sind jedem Artikel beigelegt. Auf den Inhalt im einzelnen einzugehen, ist bei der Fülle des in prägnanter Fassung gebotenen Materials nicht möglich. Beispielsweise sei nur erwähnt, daß im Artikel von YEHOSHUA BAR-HILLEL über die Arbeit von 23 Sprachübersetzungsgruppen der verschiedensten Länder berichtet wird.

Das Buch kann allen wärmstens empfohlen werden, die auf dem Gebiet der modernen Rechentechnik tätig sind.

Dresden

H. ADLER

**E. Göllnitz, H. Najuch, S. Hösel**, Differential- und Integralrechnung für Fachschulen des Maschinenbaus. 4. Aufl. X + 226 S. m. 143 Abb. Leipzig 1960. Fachbuchverlag. Preis geb. DM 10,80.

Die Studierenden der Ingenieur- und Fachschulen werden das Erscheinen der 4. Auflage des genannten Werkes sehr begrüßen, da ein anderes für diesen Leserkreis geeignetes Mathematik-Lehrbuch bisher nicht greifbar ist. Es ist begreiflich, daß die mathematische Strenge sehr oft durch eine anschauliche Plausibilitätsbetrachtung ersetzt wird. Das Buch macht den Leser mit der Technik des Differenzierens und Integrierens bekannt und bringt zahlreiche Anwendungen. Anschließend werden die Grundlagen der Theorie der Potenzreihen behandelt und einige Sätze über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen angeführt. Schließlich wird der Leser auch mit einigen numerischen und graphischen Verfahren bekannt gemacht.

Dresden

H. BIALY

**G. Meyer**, Elektronische Rechenmaschinen und ihr Einsatz in der kaufmännischen Verwaltung von Industriebetrieben. 154 S. m. 1. Falttafel. Würzburg 1960. Physica-Verlag.

Sind die programmgesteuerten elektronischen Ziffernrechenautomaten zunächst mit der Zielsetzung für wissenschaftlich-technische Berechnungen entwickelt worden, so kommt gerade den Firmen, die bis dahin nur Lochkartenmaschinen hergestellt haben, das Verdienst zu, diese Anlagen reif für kommerzielle Zwecke gemacht und ihnen damit ein breiteres Anwendungsgebiet eröffnet zu haben. Nun verlangt der Einsatz elektronischer Rechenmaschinen in der Wirtschaft sehr sorgfältige Vorbereitungen und Überlegungen bedingt durch die Problematik der Umstellung auf automatische Abrechnung. Einen Überblick über die betriebswirtschaftlichen Fragen zu geben, die beim Einsatz elektronischer Rechenmaschinen in Industrie- und Wirtschaftsbetrieben entstehen, ist das Ziel des vorliegenden Buches.

Einleitend wird der ökonomische Einsatz solcher Anlagen in Abhängigkeit von der Betriebsgröße behandelt, wobei der Verfasser in der zeitbedingten Tendenz zum Großbetrieb günstige Aussichten für einen auch weiterhin verstärkten Einsatz solcher Rechenautomaten sieht.

Bei der Erörterung der Fragen zur Technik und Programmierung des Rechenautomaten werden zugleich die wichtigsten Gesichtspunkte für die Beurteilung solcher Anlagen erarbeitet, wobei die Art der Darstellung sich der Zielsetzung des Buches entsprechend an Wirtschaftspraktiker, Unternehmer und leitende kaufmännische Angestellte wendet. Besondere Sorgfalt wird den Problemen entgegengebracht, die aus der Umstellung der kaufmännischen Verwaltung auf elektronische Rechenmaschinen erwachsen. Nach Darbietung typischer Anwendungsbeispiele aus Lohn- und Gehaltsabrechnung, Fakturierung und Buchhaltung geht der Verfasser auch auf Problemstellungen des Operations-Research ein. Fragen hinsichtlich der Zuverlässigkeit solcher Automaten werden vom Blickpunkt der Technik und Programmierung wie auch der Revision aus behandelt. Zur Organisation eines Rechenzentrums bietet der Verfasser wertvolle Erfahrungen, die um so beachtlicher sind, da sie offenbar auf seiner eigenen beruflichen Tätigkeit als Organisator in der Industrie beruhen. Die durch den Einsatz elektronischer Rechenmaschinen entstehenden sozialen Probleme werden aus dem Blickwinkel der kapitalistischen Wirtschaft gesehen. Das Buch ist lebendig und sachlich geschrieben und wird allen, die an den Fragen einer Umstellung eines Wirtschaftsbetriebes auf automatische Abrechnung interessiert sind, ein wertvoller Berater sein.

Jena

W. KÄMMERER



**A. V. Lebedev and R. M. Fedorova**, *A Guide to Mathematical Tables*. XLVI + 586 S. Oxford/London/New York/Paris 1960. Pergamon Press. Preis geb. £ 5 5 s. net.

Das vorliegende Buch ist eine von D. G. FRY besorgte Übersetzung des 1956 in Moskau erschienenen Werkes. Es umfaßt die bis 1952 in Einzelveröffentlichungen und bis 1953 in Zeitschriften erschienenen mathematischen Tafeln. (Eine Übersetzung des ersten Ergänzungsbandes, der die Neuerscheinungen bis 1958 berücksichtigt, ist inzwischen ebenfalls durch Pergamon Press veröffentlicht worden.)

Ein sehr ausführliches Inhaltsverzeichnis erleichtert die Benutzung des Buches, das im ersten Teil — nach Funktionen bzw. Operationen in 15 Kapitel unterteilt — Angaben über Genauigkeit und Schrittweite der mit Hinweis-Nrn. zitierten Tafeln bringt. Im zweiten Teil folgen in der gleichen Unterteilung entsprechend den Hinweis-Nrn. des ersten Teiles in jeweils alphabetischer Anordnung: Autor, Titel, Verlag, Veröffentlichungsort und -jahr der Tafeln. Ein Autorenregister und ein für diese Ausgabe hinzugefügter Anhang der Übersetzungen der Titel in kyrillischer Schrift vervollständigen den tadellos ausgestatteten Band.

Dresden

A. SCHUBERT

**K. Swainger**, *Analysis of Deformation*. XXVII + 370 S. m. 57 Abb. London 1959. Chapman & Hall. Preis geb. 75 s net.

Der dem Rezensenten vorliegende vierte Band des problematischen Werkes — die ersten drei Teile sind im Band 35 (1955), S. 198 und im Band 37 (1957), S. 238 dieser Zeitschrift besprochen worden — ist ebenso wie die ersten Bände auf der Idee des Verfassers aufgebaut, das gesamte Gebiet der Deformation von Medien (elastische, plastische, flüssige, viskoelastische usw.) ausschließlich durch lineare Differentialgleichungen zu beschreiben. Dazu werden die in dem ersten Band eingeführten Beziehungen zur Ermittlung von Schwingungen in Körpern benutzt. Die den Lesern dieser Zeitschrift bekannten Theorien zur Beschreibung dieser Vorgänge werden im Sinne des Autors kritisch geprüft. Ein — allerdings schlechter — Eindruck des Buches „*Analysis of Deformation*“ wird erhalten, wenn man in dem die Geophysik betreffenden Abschnitt liest, daß: 1. eine einheitliche mechanische Theorie der Ursachen von Erdbebenwellen gegeben wird, 2. die Entstehungsweise der Mondkrater beschrieben wird, 3. auf Vulkantätigkeit auf dem Mond eingegangen wird und daß ferner der wesentliche Grund der Sonnenflecken in vulkanischen Störungen der äußeren Schichten eines „Sonnenkörpers“ liegt, über dem sich eine glühende Hülle befindet. Genauso wie die ersten Bände wird auch der vorliegende Teil zu Diskussionen Anlaß geben.

Der Verfasser plant einen fünften Band „*Plates and Shells*“ und einen sechsten Band „*Atomistic Effects*“.

Freiberg/Sa.

D. RÜDIGER

**I. Szabó**, *Repertorium und Übungsbuch der Technischen Mechanik*. VII + 273 S. m. 254 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 24,—.

Mit diesem „*Repertorium*“ hat sich der Autor eine Aufgabe gestellt, die sicher eine große Aufmerksam-

keit finden wird. Das Buch enthält nahezu den gesamten Stoff des Lehrgebietes der Technischen Mechanik in gedrängter und dennoch klarer und übersichtlicher Form. Dabei lehnt sich der Verfasser an seine bekannten Bücher „*Einführung in die Technische Mechanik*“ und „*Höhere Technische Mechanik*“ an. Eine Vielzahl typischer, durchgerechneter Beispiele unterstützt wesentlich den Leser bei der Durcharbeitung des Stoffes. Im vorliegenden Buch ist der Plan des Autors verwirklicht, Interessenten eine Sammlung der wichtigsten Sätze und Formeln der Technischen Mechanik und gleichzeitig seinen Hörern eine kurze Darstellung des mit Beispielen illustrierten Lehrstoffes zur Examensvorbereitung zu geben. Das Werk wird allen Studierenden für die Prüfungsvorbereitung auf dem Gebiete der Mechanik ein wertvolles Hilfsmittel sein.

Freiberg/Sa.

D. RÜDIGER

**W. Stampf**, *Der durchlaufende Bogensträger auf elastischen Stützen mit und ohne Versteifungsträger*. VIII + 196 S. m. 206 Abb. u. 2 Tafeln. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 37,50.

Das Werk enthält ausführliche Rechenvorschriften für die statische Berechnung durchlaufender Bogensträger mit und ohne Versteifungsträger auf elastischen Stützen. Die angewendete „*Drehwinkelmethode*“ hat gegenüber dem „*Kraftgrößenverfahren*“ die bekannten rechnerischen Vorteile und schränkt die Anzahl der „überzähligen Größen“ wesentlich ein. Obwohl das Buch damit im wissenschaftlichen Sinne nichts Neues bringt, wird es von den Statikern, die derartige Tragwerke entwerfen und berechnen müssen, mit großem Nutzen verwendet werden.

Freiberg/Sa.

D. RÜDIGER

**H. Graudenz**, *Momenten-Einflußzahlen für Durchlaufträger mit beliebigen Stützweiten*. 3. Aufl. IV + 90 S. m. 14 Abb. u. 80 Zahlentafeln. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis brosch. DM 7,50.

Das vorliegende Buch ist für den in der Praxis stehenden Ingenieur gedacht und dient zur schnellen Berechnung der Stützenmomente von Durchlaufträgern über 2, 3 und 4 Felder. Die getrennte Angabe des Anteiles aus jedem Feld zu einem gesuchten Moment ermöglicht es dabei im Gegensatz zu anderen derartigen Tabellenbüchern, feldweise verschiedene Belastungen und Trägheitsmomente zu berücksichtigen. So sind in den 80 Tabellen die Stützenmomente für 496 verschiedene reduzierte Stützweitenverhältnisse angegeben, die für sämtliche in der Praxis vorkommenden Fälle ausreichen dürften, da bei extremen Verhältnissen auch die Trägheitsmomente entsprechend verschieden sein werden. Die Ermittlung von Einflußlinien ist mit den Werten der vorhandenen Tafeln bequem möglich. So ist auch die dritte Auflage des Buches für den Statiker eine große Hilfe und kann bestens empfohlen werden.

Freiberg/Sa.

D. RÜDIGER

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.



M. A. NEUMARK

# Lineare Differentialoperatoren

Übersetzung aus dem Russischen

in deutscher Sprache bearbeitet und herausgegeben von

Prof. Dr. Heinz Otto Cordes

und Prof. Dr. Fritz Rühls

(Mathematische Lehrbücher und Monographien, II. Abteilung, Band XI)

1960. XIII, 394 Seiten — 19 Abbildungen — gr. 8° — Ganzleinen DM 44,—

Der Verfasser entwickelt in der Arbeit die für die gesamte mathematische Physik und Technik so wichtige Theorie der linearen gewöhnlichen Differentialoperatoren beliebiger Ordnung und bringt viele Beispiele aus der Praxis. Durch dieses Werk werden die in aller Welt, insbesondere in der Sowjetunion, erschienenen neueren Arbeiten auf diesem Gebiet zugänglich gemacht.

Ein erster, elementarer Teil entwickelt die grundlegenden Begriffe und Sätze: die Formulierung der Randwertaufgabe, Eigenwerte und Eigenfunktionen, die GREENsche Funktion und die Lösung der inhomogenen Randwertaufgabe, die Entwicklung nach Eigenfunktionen sowie das asymptotische Verhalten der Eigenwerte und Eigenfunktionen. Im zweiten Teil des Buches wird die moderne Theorie der Operatoren im Hilbertraum auf Differentialoperatoren angewandt. Der Verfasser behandelt insbesondere die symmetrischen Differentialoperatoren, den Defektindex und die Spektralanalyse der Differentialoperatoren. Den Abschluß des Buches bildet das Kapitel über die Umkehrung der STURM-LIOUVILLEschen Aufgabe.

*Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten*

A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N



# Optik aller Wellenlängen

Tagung der Physikalischen Gesellschaft in der Deutschen Demokratischen Republik  
vom 2.—5. November 1958 in Jena

Herausgegeben im Auftrage der Physikalischen Gesellschaft in der Deutschen Demokratischen Republik von Prof. Dr. h. c. PAUL GÖRLICH und Dr. R. TIEDEKEN

1959. 395 Seiten — 315 Abbildungen, davon 6 Kunstdrucktafeln mit 20 mehrfarbigen Abbildungen  
7 Tabellen — gr. 8° — DM 75,—

In dem Werk sind alle auf der Arbeitstagung der Physikalischen Gesellschaft in der DDR im November 1958 in Jena vorgetragenen Berichte und einige andere Beiträge enthalten. Durch die Beteiligung auch westdeutscher und ausländischer Fachkollegen erhält das Buch internationale Bedeutung. Behandelt werden Fragen der Grundlagenforschung, wie „Über eine Verallgemeinerung der Schrödingergleichung“ von J. Picht und Ausführungen über „Optik, Physik und physikalische Optik“ von Ronchi in italienischer Sprache. Neben Problemen der Halbleiter werden Fragen der Spektroskopie erörtert und neuere Spektralapparate beschrieben. Weitere Berichte beschäftigen sich mit der physiologischen Optik, der Beugungstheorie, der Berechnung von Optiken und der Mikroskopie. Einen etwas größeren Raum nehmen die Arbeiten über Objektivprüfung speziell mit Hilfe der Kontrastübertragungsfunktion ein, zu dem u. a. Hopkins, London, Ingelstam, Stockholm und Rosenhauer, Braunschweig, sowie Zöllner, Jena, Beiträge lieferten. Abschließend werden einige Sonderprobleme über dünne Schichten, Schlierenbestimmungen, Lichtleistung von Projektionssystemen und über Schwingungen aller Wellenlängen des Erdkörpers besprochen.

*Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten*

A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N